UNIVERSITÉ, Dr. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE DE MASTER

en mathématique
Spécialité : Recherche Opérationnelle

ETUDE DE LA COLORATION DOMINATRICE DANS LES GRAPHE

Présenté par

MOUALI Monira et BOUKHALFA Siham

devant le Jury composé de :

N. IKHELEF ESCHOUF	Maître de Conférences - A	U.YF.M	Président
M.BOUZEFRANE.	Maître Assistant - A	U.YF.M	Examinateur
M.ZAMIME	Maître C- B	U.YF.M	Encadreur

05 – juin – 2018

Table des matières

Tables des matières **1**

Liste des figures **1**

Introduction **1**

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes **4**

1.1 Définitions et notations 4

1.1.1 Graphes 4

1.1.2 Voisinages 5

1.1.3 Degré d'un sommet 6

1.1.4 Sous-graphes et graphes partiels 6

1.1.5 Ensemble minimal (resp. Maximal) / minimum (resp. Maximum) . . 7

1.1.6 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres 7

1.1.7 Chaînes et cycles 7

1.1.8 Graphes particuliers 8

1.1.9 Quelques invariants de graphes 14

1.1.10 Quelques opérations sur les graphes 15

1.2 Compléxité algorithmique 16

1.2.1 Problème de décision 17

1.2.2 Classes de complexité 17

2 Quelques résultats existants sur la coloration dominante 20

2.1 Coloration dominante 20

2.2 Quelques bornes du nombre chromatique dominant 21

2.2.1 Résultats préliminaires 22

2.2.2 Graphes bipartis 23

2.2.3 Les arbres 23

2.3 Quelques résultats existants sur Le nombre chromatique dominant 26

2.3.1 Le nombre chromatique dominant de quelques graphes élémentaires . 26

2.3.2 Le nombre chromatique dominant d'un graphe biparti 27

2.3.3 Le nombre chromatique dominant du graphe central 28

2.3.4 Le nombre chromatique dominant du graphe milieu et graphe total de quelques graphes élémentaires 29

2.3.5 Le nombre chromatique dominant de certains graphes 32

3 Nombre chromatique dominant de certains graphes particuliers 35

3.1 Le nombre chromatique dominant de prisme complémentaire des chaînes et des cycles 35

3.2 Le nombre chromatique dominant de produit croisé des chaînes 39

4 L'effet de la suppression d'une arête sur le nombre chromatique dominant 42

4.1 Graphe arête χ_d-critique 42

Conclusion 47

Liste des Figures

1.1.1 Un graphe simple. 5
1.1.2 Un graphes partiels et un Sous-graphes 7
1.1.3 Une chaîne (P_6) et un cycle (C_6). 8
1.1.4 Un graphe complet d'ordre 4 (K_4). 9
1.1.5 Un graphe G et son complémentaire. 9
1.1.6 Un graphe biparti ($K_{4,4}$) et un graphe biparti complet ($K_{4,4}$). 10
1.1.7 Un graphe de Petersen. 11
1.1.8 Un arbre. 11
1.1.9 Une chenille. 12
1.1.10 Un étoile ($K_{1,n}$). 12
1.1.11 Une araignée 13
1.1.12 La couronne d'un (C_3) 14
1.1.13 Produits de chaînes (P_2) et (P_3): 16

2.1.1 Une coloration dominante du graphe G 21
2.3.1 Un graphe central C(G). 28
2.3.2 Un graphe milieu M(G). 30
2.3.3 Un graphe total T(G). 31
2.3.4 Un graphe du livre (B_3) 32
2.3.5 Un graphe de prisme n-croisé. 33
2.3.6 Un graphe banane ($B_{2,3}$) 34

3.1.1 Une coloration dominante de prisme complémentaire. 37

3.1.2 Une coloration dominante de prisme complémentaire. 37
3.1.3 Une coloration dominante de prisme complémentaire d'un cycle. 39
3.1.4 Une coloration dominante de prisme complémentaire d'un cycle. 39
3.2.1 Une coloration dominante de produit croisé d'une chaîne. 40
3.2.2 Une coloration dominante de produit croisé d'une chaîne. 41

-

Résumé

Dans ce mémoire, notre étude est portée sur *la coloration dominante* et *le nombre chromatique dominant*. *Une coloration dominante* est une coloration propre de G telle que tout sommet domine au moins une classe de couleur. Le *nombre chromatique dominant*, noté $\chi_d(G)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration dominante de G. Une coloration dominante minimum est dite une $\chi_d(G)$-coloration.

Nous présentons en premier lieu quelques résultats existants sur la coloration dominante, ensuite nous déterminons le nombre chromatique dominant des graphes: prisme complémentaire d'une chaîne, d'un cycles, et produit croisé d'une chaîne. Enfin, nous allons étudier l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre chromatique dominant.

Abstract

In this report, the aim of our work is to study focuses on the dominator coloring and the dominator chromatic number in graphs. A dominator coloring of a graph G is a proper coloring in which each vertex of the graph dominates every vertex of some color class. The dominator chromatic number is the minimum number of color classes in a dominator coloring of a graph G and is denoted by $\chi_d(G)$.

We present some existing results on the dominator coloring. We determine the dominator chromatic number of a complementary prism of a path, a cycle, and a crossed product of a path. Finally, we will study the effect of deleting an edge on the dominator chromatic number.

Remerciements

Nous tenons à remercie en premier lieu, Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nous voudrons sincèrement exprimer nos plus vifs remerciements à notre promoteur Monsieur ZAMIME MOHAMED, Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'intéressant sujet qu'il nous a proposé. Sa disponibilité et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. On lui doit toute notre reconnaissance.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nous remerciements les plus vifs Mr BAN AICHOCHE, AIOULA SOUMIA pour son aide et ses conseils.

- Nos remerciements vont également à Monsieur BOUZEFRANE MOHAMED, Maître de assistant à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, et à Monsieur NOURED-DINE IKHLEF ESCHOUF, Maître de conférences à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Je tiens également a exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. Yahia Farès de Médéa.

Enfin, il est important pour nous de remercier nos parents, d'avoir fait de leur mieux pour que nous puisons accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de nous encourager. Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous les membres de la famille surtouts notre sœurs et frères, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à notre formation.

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes frères et a mes soeurs*

A *mes amies*

A *ma chère binôme* ***Siham*** *et sa famille*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

MONIRA

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements*

A *mes frères et a ma trés chère soeur*

A *mes amies*

A *ma chère binôme* ***Monira*** *et sa famille*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

SIHAM

Introduction

La *recherche opérationnelle* est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la recherche opérationnelle s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la recherche opérationnelle a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

L'histoire de la *théorie des graphes* débute avec les travaux du mathématicien suisse *Leonard Euler* au $18^{ème}$ siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des *ponts de Konigsberg*, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même point et revenir à son point de départ. Dès le début du $20^{\text{ème}}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de *Konig, Menger, Cayley* puis de *Berge* et *d'Erdös*.

Un des problèmes les plus connus de la théorie des graphes vient de la *coloration* des graphes, où le but est de déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun sommet n'ait la même couleur que ses voisins. En 1852, le mathématicien anglais *Francis Guthrie* énonça le problème des quatre couleurs par une discussion à son frère, qui demandera à son professeur *Auguste De Morgan* si toute carte peut être coloriée avec quatre couleurs de façon que des pays voisins aient des couleurs différentes. Le problème de la coloration a suscité l'intérêt de grands chercheurs en théorie des graphes. Cet intérêt sans cesse croissant est largement motivé par le fait que beaucoup de problèmes concrets peuvent être modélisés en termes de coloration de graphes

comme l'ordonnancement de tâches, l'allocation de fréquences et le problème d'emploi de temps. La coloration des sommets est certainement le concept le plus ancien et le plus étudié. Il s'agit d'affecter des couleurs (entiers positifs) aux sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne doivent pas avoir la même couleur, une telle coloration est dite *propre* (*classique*). Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs *K. Appel* et *W. Haken* ont pu répondre affirmativement à la conjecture des quatre couleurs. La recherche d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes.

En théorie des graphes la coloration et la domination sont deux domaines importants qui ont été largement étudiés. Le paramètre fondamental dans la théorie de la coloration de graphe est le nombre chromatique $\chi(G)$ d'un graphe G qui est défini comme étant le nombre minimum de couleur requis pour colorer les sommets de G de tel sort qu'aucuns deux sommets adjacents ne reçoivent la même couleur. Si $\chi(G) = K$, on dit que G est K-chromatique.

Un ensemble dominant S est un sous -ensemble des sommets dans un graphe telle que chaque sommet du graphe appartient à S ou a un voisin dans S. Le nombre de domination est l'ordre d'un ensemble dominant minimum. Étant donné un graphe G et un entier K trouvent un ensemble dominant d'ordre K est NP-complet sur un graphe arbitraire. [17] [23]

La coloration de graphe est utilisée comme model pour un grand nombre de problèmes pratiques impliquant l'allocation de ressources rares (par exemple, problèmes d'ordonnancement) et a joué un rôle clé dans le développement de la théorie des graphes et plus généralement des mathématiques discrètes et optimisation et combinatoire. Un graphe à une coloration dominante s'il a une coloration appropriée, chaque sommet du graphe domine chaque sommet de la même classe de couleur. Le nombre chromatique dominant $\chi(G)$ est le nombre minimum de classes de couleur dans une coloration dominante d'un graphe G . Notre travail est motivé par les travaux de [10] et [18].

Ce mémoire est développé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous donnons également un petit aperçu de quelques notions élémentaires de complexité algorithmique.

Dans le deuxième chapitre, On commence par la définition de la coloration, la domination et la coloration dominante. Nous nous intéressons dans ce chapitre au problème de la coloration dominante où nous citons quelques bornes et résultats existants sur le nombre chromatique dominant d'un graphe.

Le troisième chapitre porte sur notre contribution dans le domaine de la coloration dominante, où nous donnons la valeur exacte du nombre chromatique dominant des graphes prisme complémentaire d'une chaine, d'un cycle, et le produit croisé d'une chaine.

Dans le quatrième chapitre, nous allons étudier l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre chromatique dominante $\chi(G)$ pour certaines classes particulières de graphes.

Ce mémoire s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes. D'où, la première partie est un rappel de quelques définitions nécessaires qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphes

Un graphe G est un couple (V, E), où V est l'ensemble des sommets, et E est un ensemble de paires d'éléments de V appelées arêtes. Pour un graphe G; on notera $V(G)$ l'ensemble de ses sommets et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes, ou simplement V et E si le contexte est explicite. Un graphe est dit trivial s'il ne possède qu'un seul sommet et aucune arête.

Un graphe G est dit simple si tout couple de ses sommets est relié par au plus une arête et que toute arête de $E(G)$ a ses extrémités distinctes.

L'ordre d'un graphe est le cardinal de son ensemble de sommets. Un graphe est dit fini ou infini suivant son ordre. Les graphes considérés dans ce cours sont simples et finis.

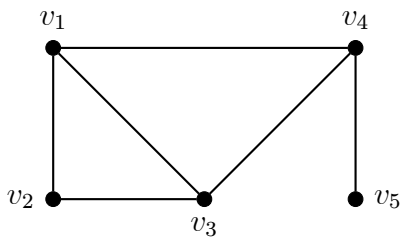


Figure 1.1.1 : Un graphe simple.

1.1.2 Voisinages

Soit $G = (V; E)$ un graphe simple.

- Deux sommets u et v sont *adjacents* si l'arête uv existe dans E. Les sommets u et v sont *voisins*.
- Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.
- Une arête est *incidente* à un sommet v, si v est l'une de ses extrémités.
- Le *voisinage ouvert* d'un sommet v de G, noté par $N_G(v)$, est défini par l'ensemble

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$$

et le *voisinage fermé* de v, noté par $N_G[v]$, est défini par

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

Soit $S \subseteq V$. L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. Fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$. Parfois pour alléger les notations et s'il n'y a aucune confusion sur le graphe G, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

1.1.3 Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet u, noté $d(u)$, est le nombre de sommets adjacents à u. Formellement,

- $d(u) = |N(u)|, \forall u \in V$.
- $\delta(G) = \min\{d(u), u \in V\}$.
- $\Delta(G) = \max\{d(u), u \in V\}$.

Un sommet de degré nul est dit isolé et un sommet de degré égal à 1 est appelé feuille. Le sommet adjacent à une feuille est appelé support. Un sommet adjacent à tous les sommets de G est dit sommet universel de G.

Le voisinage privé d'un sommet $u \in X$ par rapport à X dans $G = (V, E)$, avec $X \subseteq V$, est $p_n(u, X) = N[u] \setminus N[X \setminus \{u\}]$.

1.1.4 Sous-graphes et graphes partiels

Un sous graphe H d'un graphe G est un graphe dont l'ensemble des sommets est contenu dans l'ensemble des sommets de G et l'ensemble des arêtes est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs extrémités dans $V(H)$.

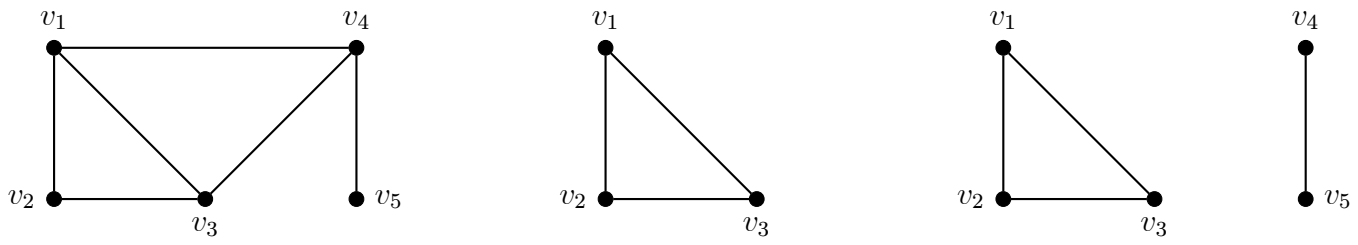
Formellement, un graphe $G_A = (A, E_A)$ est un sous graphe de $G = (V, E)$ si $A \subseteq V(G)$ et $E_A \subseteq \{uv, u \in A, v \in A \text{ et } u \neq v\}$.

Si le sous graphe a le même ensemble de sommets que le graphe qui le contient, i.e. $A = V(G)$, on parle de graphe partiel.

Le graphe induit est définie par un sous ensemble de sommets. Formellement,

Le sous graphe de $G = (V, E)$ induit par $A \subseteq V$, est formé des sommets de A et des arêtes de E_A dont les deux extrémités sont dans A. Il est noté $G[A]$.

Observer, qu'un graphe partiel $G_B = (B, E_B)$ de G est construit à partir de G en enlevant quelques arêtes, alors qu'un sous graphe induit G_A de G est aussi construit à partir de G mais en enlevant quelques sommets et les arêtes incidentes à ces sommets.



$G = (V, E)$ $G_A = (A, E_B)$ $G_B = (B, E_B)$

Figure 1.1.2 : Un graphes partiels et un Sous-graphes .

1.1.5 Ensemble minimal (resp. Maximal) / minimum (resp. Maximum)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, on dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimal* (resp. *Maximal*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$. On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *Maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$ et $|A| > |B|$ (resp.$|B| > |A|$) où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

1.1.6 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres

Soit $G = (V, E)$ un graphe et u, v deux sommets de V. La *distance* entre u et v, notée $d(u, v)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.

L'excentricité de v, noté $exc(v)$, est définie par $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$.

Le *diamètre* de G est $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$.

Le *rayon* de G est $rad(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$.

Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

1.1.7 Chaînes et cycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Une *chaîne* P de G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_k$, où pour tout $i \in \{1, ..., k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont les *extrémités* de la chaîne P, et les sommets $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ sont les *sommets intérieurs* de P.
- Une chaîne P est *simple* si chaque arête de P est empruntée une seule fois.
- Une chaîne P est *élémentaire* si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Dans une chaîne P, une arête qui relie deux sommets non consécutifs est dite une *corde*.
- Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire sans corde.
- Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. On note par C_n le cycle induit par n sommets. De la même manière, on définit un *cycle simple* et un *cycle élémentaire*.

La *longueur* d'un cycle est le nombre de ses arêtes.
La *maille* d'un graphe G, notée $g(G)$, est la longueur du plus petit cycle dans G.



P_6 C_6

Figure 1.1.3 : Une chaîne (P_6) et un cycle (C_6).

1.1.8 Graphes particuliers

Graphe complet

Un graphe G est dit complet si pour toute paire de sommets (x, y), il existe une arête les reliant, (tous les sommets sont deux à deux adjacents). Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n.

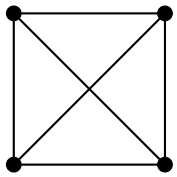


Figure 1.1.4 : Un graphe complet d'ordre 4 (K_4).

Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si pour chaque paire de sommets distincts $u, v \in V$, il existe une chaîne joignant v et u. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

Graphe planaire

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *planaire* s'il peut être déssiné dans la plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

Graphe discret

Un graphe *discret,* noté D_n, est un graphe sans arêtes.

Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire d'un graphe simple $G = (V, E)$ noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $\overline{E} = E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.

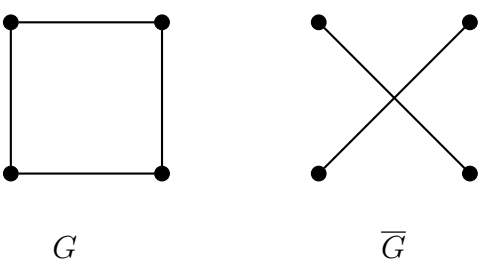


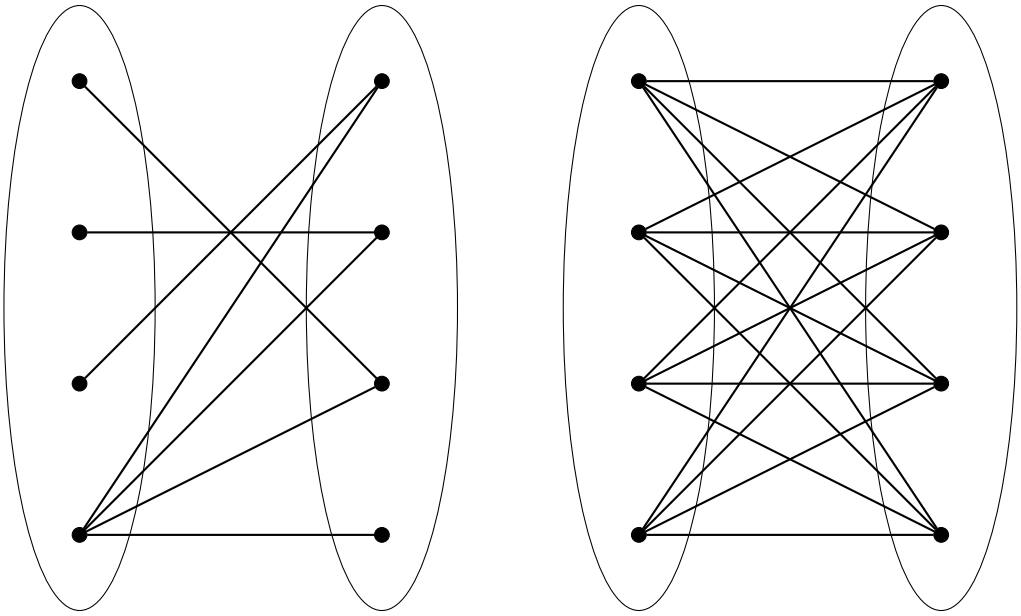
Figure 1.1.5 : Un graphe G et son complémentaire.

Graphe régulier

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit *régulier*. Si le degré est égal à d pour tout sommet, alors on dit que le graphe est *d-régulier*. Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique.

Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* si V peut se partitionner en deux sous-ensembles stables V_1 et V_2, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de V_1 à un sommet de V_2. *Un graphe biparti complet* est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante: tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$. Alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.



biparti $K_{4,4}$ biparti complet $K_{4,4}$

Figure 1.1.6 : Un graphe biparti ($K_{4,4}$) et un graphe biparti complet ($K_{4,4}$).

Graphe de petersen

Le graphe de Petersen est un graphe 3-régulier de 10 sommets et 15 arêtes.

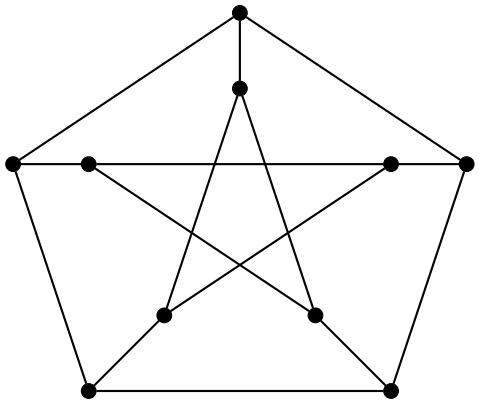


Figure 1.1.7 : Un graphe de Petersen.

Arbre

On appelle *arbre* à n sommets et on note par T un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes. Un arbre est dit trivial (resp. Non trivial) s'il contient un seul sommet (resp. Au moins deux sommets). On appelle *feuille* d'un arbre un sommet de degré 1 (sommet pendant).

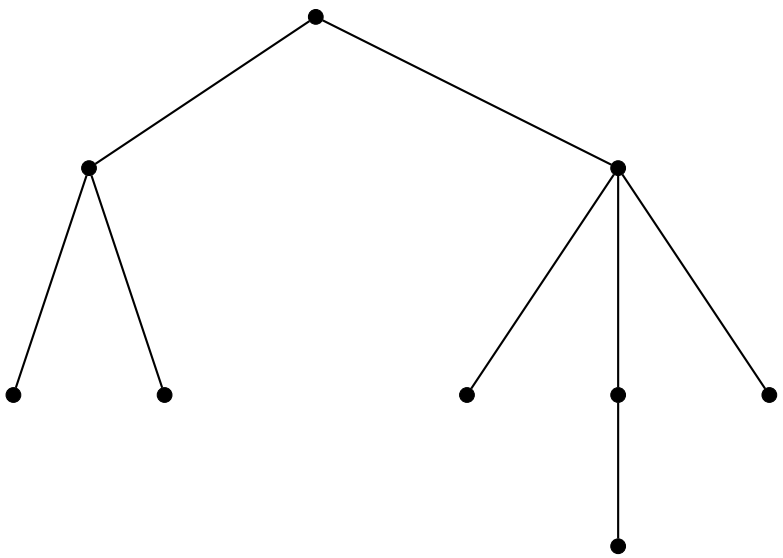


Figure 1.1.8 : Un arbre.

Une chenille

Une chenille est un arbre dont chaque sommet de degré au moins trois, a au plus deux voisins différents des feuilles.

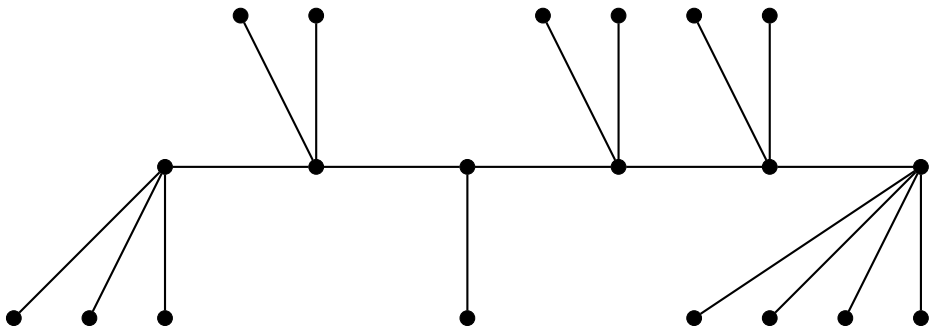


Figure 1.1.9 : Une chenille.

Étoile

On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, $(n \geq 3)$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles.

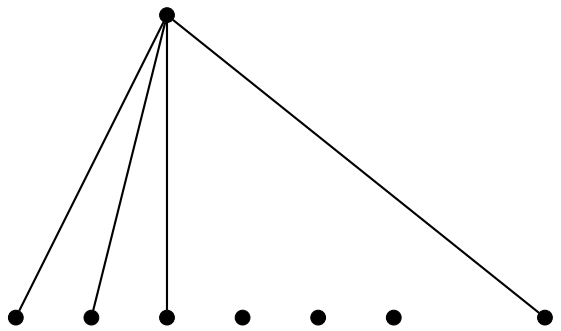


Figure 1.1.10 : Un étoile $(K_{1,n})$.

- Une araignée est un graphe avec $2n+1$ sommets formés en subdivisant au plus n arêtes d'une étoile $K_{1,n}$. Un graphe d'arainée $K_{1,n}$ est illustré dans la figure suivante:

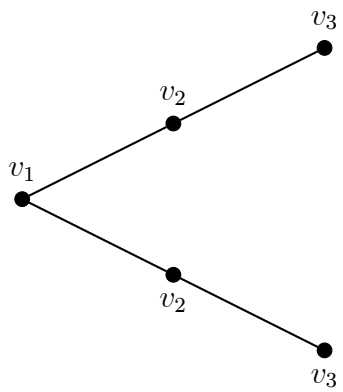


Figure 1.1.11 : Une araignée .

- Un *cactus* est un graphe où chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit *unicycle*.

- Un graphe est dit *sans griffe* (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

- On appelle *couronne d'un graphe* G, notée $Cr(G)$ ou $G \circ K_1$, le graphe obtenu en attachant à chaque sommets de G un sommet pendant, et donc il est évident que l'ordre de $Cr(G)$ est égal à $2|V(G)|$.

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *graphe adjoint* de G (ou *graphe de ligne*) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

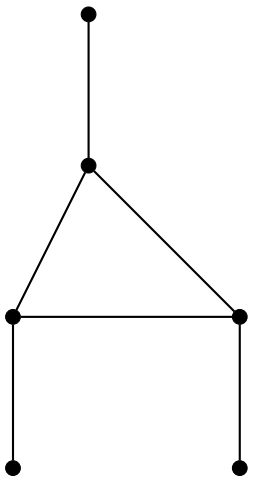


Figure 1.1.12 : La couronne d'un (C_3) .

1.1.9 Quelques invariants de graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

- Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un *dominant* de G, si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le cardinal d'un dominant minimum de G est noté par $\gamma(G)$. Et est appelé *nombre de domination inférieur* de G.

- Une *clique* dans G est un sous ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

- *Un stable* dans un graphe G, appelé aussi (*ensemble indépendant),* est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G, noté $\alpha(G)$ et est appelé *nombre de stabilité* de G.

- Un couplage dans un graphe G est sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacents. Un sommet x est dit saturé par un couplage M si x est l'extrémité d'une arête de M. Dans le cas contraire, x sera dit est insaturé par M. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé couplage *parfait* de G.

1.1.10 Quelques opérations sur les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

- Soient v et e un sommet et une arête de G respectivement. On note par $G - v$ le sous-graphe engendré par l'ensemble $V - \{v\}$. D'autres termes, $G - v$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. On note aussi par $G - e$ le graphe $G' = (V, E - \{e\})$. Donc $G - e$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés). Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on note $G - S$ le sous-graphe engendré par $V - S$.

- Soient G et H deux graphes. L'*union* de G et H est le graphe $G + H$ dont l'ensemble des sommets est $V(G) \cup V(H)$ et l'ensemble des arêtes est $E(G) \cup E(H)$. Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est notée par kG.

- Le *joint* de G et H est le graphe noté $G \vee H$ obtenu à partir de $G + H$ en ajoutant toutes les arêtes entre G et H.

Produits des graphes

Soient G et H deux graphes. Dans chacun des produits étudiés, les sommets du graphe résultant sont des paires de sommets (u, v) où $u \in V(G)$ et $v \in V(H)$. On définit les trois types de produits suivants:

Produit cartésien Le produit cartésien $G\square H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si soit $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1 = y_2$, où bien $y_1y_2 \in E(H)$ et $x_1 = x_2$. Autrement dit, deux sommets du produit $G\square H$ sont adjacents si et seulement si les sommets de l'une de leurs coordonnées sont égaux et ceux de l'autre coordonnée sont adjacents.

Produit direct ou croisé Le produit direct $G \times H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1y_2 \in E(H)$.

Remarque 1.1.1 *D'après les définitions du produit cartésien et du produit direct, on remarque que* $E(G\square H) \cap E(G \times H) = \emptyset$.

Produit fort ou total Le produit direct $G \boxtimes H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si

- $x_1 = x_2$ ou $x_1x_2 \in E(G)$;
- $y_1 = y_2$ ou $y_1y_2 \in E(G)$.

Ceci veut dire que

$$E(G \boxtimes H) = E(G\square H) \cup E(G \times H)$$

Exemple 1.1.1 *Les trois produits sont illustrés dans la figure suivante:*

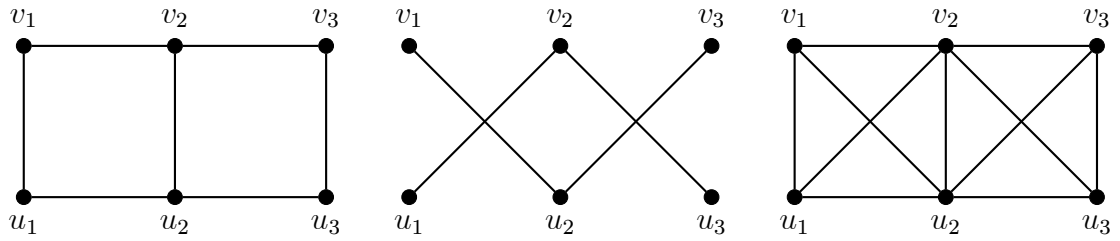


Figure 1.1.13 : Produits de chaînes (P_2) et (P_3): .

1.2 Compléxité algorithmique

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon efficace, en tenant compte du temps de calcul et les données stoquées en mémoire.

1.2.1 Problème de décision

Chaque problème informatique peut se réduire à un problème de *décision*, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce, qui cherche, dans un graphe, à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision comme suit: Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à k, avec $k \in \mathbb{N}$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.2.2 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème p est dit Polynomial (i.e. $p \in P$), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial.

Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. Etant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par une chaîne. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

Classe NP

Un problème p est dans NP, s'il est résoluble par un algorithme Non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non.

Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes:

- le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel);
- le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, que $P \subset NP$.

Problème NP-Complet

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Formellement, on définit une notion de réduction: Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de $p^{'}$ à p est un algorithme transformant toute instance de $p^{'}$ en une instance de p. Ainsi, si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre $p^{'}$, p est donc au moins aussi difficile à résoudre que p'. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes NP-complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre éfficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que $P \subset NP$, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

Le problème p est alors NP-difficile si pour tout problème $p^{'}$ de NP, $p^{'}$ se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de $p^{'}$ à une instance de p est polynomial.

Classe NP-complet:

Le problème étant dans NP et NP-difficile, il est NP-complet, autrement dit, les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe.

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur la coloration dominante

Le problème de la détermination du nombre chromatique dominant pour un graphe quelconque est un problème NP-complet. Dans [15], [6], les auteurs ont donné un algorithme polynomiale pour déterminer le nombre chromatique dominant dans les arbres.

2.1 Coloration dominante

Le problème de la coloration dominante a été introduit dans [10], son étude a été motivée par l'article de Cockayne & al. [40].

Définition 2.1.1 *Étant donné un graphe $G = (G, V)$, une coloration propre des sommets de G est une application $f : V \to C$, où C désigne l'ensemble des couleurs, tel que $f(u) \neq f(v)$, $\forall u, v \in E$.*

Évidemment, tout graphe admet une coloration propre, en effet il suffit de donner à chaque sommet une couleur différente des autres sommets. Un graphe qui admet une coloration propre utilisant au plus k couleurs est dit k-coloration .

Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour une coloration propre de G. Une coloration propre d'un graphe G est une partition de l'ensemble des sommets, de sorte que chaque partie induit un stable dans G.

Définition 2.1.2 *Un ensemble dominant d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble de sommets $D \subset V$, tel que tout sommet qui n'est pas dans D est adjacent à au moins un sommet de D, i.e. $N[D] = V$.*

Le nombre de domination de G, noté par $\gamma(G)$, est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G.

Un ensemble dominant minimum d'un graphe G est dit γ-ensemble de G.

Définition 2.1.3 *Une coloration dominante d'un graphe simple G, est une coloration propre telle que tout sommet domine au moins une classe de couleur.*

Explicitement, soit un sommet x et une classe de couleur C. x domine C s'il est adjacent à tous les sommets de C ou si x est le seul sommet de C.

Définition 2.1.4 *Le nombre chromatique dominant d'un graphe G, noté $\chi_d(G)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration dominante de G. Il est noté $\chi_d(G)$ et une coloration dominante minimum est dite une $\chi_d(G)$-coloration.*

La figure suivante représente un graphe G tq $\chi_d(G) \leq 3$.

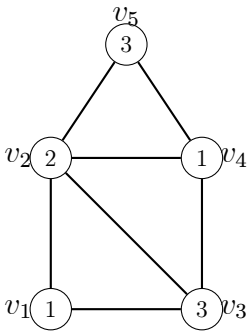


Figure 2.1.1 : Une coloration dominante du graphe G .

2.2 Quelques bornes du nombre chromatique dominant

Le problème de la détermination du nombre chromatique dominant pour un graphe quelconque est un problème NP-complet [15] meme si on restainte aux graphes bipartis

2.2.1 Résultats préliminaires

Soit G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. La coloration qui attribue une couleur différente à chaque le sommet de G est une coloration propre telle que chaque sommet dominane la classe de couleur qui le contient.

Ainsi, le nombre chromatique dominant est défini pour chaque graphe, et de plus $\chi_d(G) \leq n$.

Proposition 2.2.1 *[15] Pour tout graphe G on a,*

$$\chi(G) \leq \chi_d(G).$$

Proposition 2.2.2 *[15] Pour un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$*

$$\chi_d(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

Et cette borne est atteinte.

Remarque 2.2.1 *[15] Pour tout graphe G connexe d'ordre $n \geq 2$, on a*

$$2 \leq \chi_d(G) \leq n$$

Et ces bornes sont atteintes.

Proposition 2.2.3 *[15] Si G est un graphe non connexe avec des composantes $G_1, G_2, ..., G_k$ avec $k \geq 2$, alors*

$$\max_{i \in \{1,2,...,k\}} \chi_d(G_i) + k - 1 \leq \chi_d(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi_d(G_i)$$

Et ces bornes sont atteintes.

Proposition 2.2.4 *[15] Il existe un graphe G pour lequel $\chi_d(H) > \chi_d(G)$. Il existe aussi un graphe G pour lequel $\chi_d(H) < \chi_d(G)$ où H est un sous-graphe de G.*

Théorème 2.2.1 *[7] Soit G un graphe connexe, alors*

$$\max\{\chi_d(G), \gamma(G)\} \leq \chi_d(G) \leq \chi(G) + \gamma(G).$$

2.2.2 Graphes bipartis

Nous étudions maintenant la coloration dominante dans les graphes bipartis.

Théorème 2.2.2 *[14] Soit G un graphe biparti connexe alors:*

$$2 \leq \chi_d(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Les bornes sont atteintes.

Théorème 2.2.3 *[14] Soit G un graphe biparti connexe alors:*

$$\gamma(G) \leq \chi_d(G) \leq 2 + \gamma(G).$$

Proposition 2.2.5 *[14] Soit k un entier avec $2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, alors il exist un graphe biparti d'ordre n connexe avec $\chi_d(G) = k$.*

Proposition 2.2.6 *[14] Soit G un graphe biparti, alors $Cor(G)$ est un graphe biparti avec $\chi_d(G) = \left\lfloor \frac{|Cor(G)|}{2} \right\rfloor + 1$.*

2.2.3 Les arbres

Pour les arbres, M. Chellali & H. Boumediene [7] ont caractérisé la classe de graphe G pour lesquels $\chi_d(G)$ est minoré par $\gamma(G) + 1$.

Proposition 2.2.7 *[6] Soit T un arbre non trivial différent d'une étoile Si $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$. Alors, dans une χ_d-coloration de T où toutes les feuilles portent une même couleur, chaque sommet de $V \setminus (A \cup B)$ est adjacent à au moins un support de T.*

Théorème 2.2.4 *[6] [30] Soit $T = (V, E)$ un arbre non trivial. Alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ si et seulement si T admet un ensemble dominant minimal $D = D_I \cup D_R$ tel que $V(T) - (D_R \cup N(D_I))$ est un ensemble indépendant, où $D_I = \{v \in D, pn(v, D) = \{v\}\}$ et $D_R = D - D_I$.*

L'existence ou non d'un ensemble dominant minimal d'un arbre T satisfaisant la propriété du Théorème précédent nécessite la connaissance de tous les ensembles dominants minimum de T: Cependant, cette tâche n'est pas facile car un arbre peut admet plusieurs ensembles dominants minimums. Donc, il est naturel de chercher une autre caractérisation pour trouver facilement le nombre chromatique dominant pour n'importe quel arbre.

Notre premier résultat concerne des arbres non triviaux avec des nombres de couverture et de couverture de sommet égaux. Nous montrerons que pour de tels arbres T. $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$. Nous avons besoin du résultat suivant en raison de Volkmann [30].

Théorème 2.2.5 *[6] Un arbre non trivial T vérifie $\gamma(T) = \alpha_0(T)$ si et seulement si chaque composante du graphe résultant de T en supprimant l'ensemble des feuilles et de leurs supports est un sommet isolé ou une étoile où les centres de ces étoiles ne sont pas adjacents à un support dans T.*

Proposition 2.2.8 *[6] Si T est un arbre non trivial avec $\gamma(T) = \alpha_0(T)$, alors*

$$\chi_d(T) = \gamma(T) + 1.$$

Lemme 2.2.1 *[6] Chaque arbre T d'ordre au moins trois admet une coloration dominante minimale de sorte que toutes les feuilles ont la même couleur.*

Lemme 2.2.2 *[6] Soit T un arbre non trivial différent d'une étoile. Si $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$, alors pour toute coloration dominante minimale de T telle que toutes les feuilles ont la même couleur, les conditions suivantes sont vérifiés:*

a) $|C_G| = 1$.

b)$A \cup DS$ est un ensemble dominant minimum de T. On autre $A \cap DS = \emptyset$.

c)Chaque classe de couleur $R \in C_S$ est dominée par un sommet unique $x_R \in B$, telle que $A \subset DS$

Lemme 2.2.3 *[6] Soit T un arbre non trivial différent d'une étoile. Si $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$, alors pour toute coloration dominante minimale de T telle que toutes les feuilles ont la même couleur, les conditions suivantes sont vérifiés:*

a $N(DS) = V \setminus (A \cup B)$.

b DS est un ensemble packing.

Théorème 2.2.6 *[6] Soit T un arbre non trivial. Alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:*

a Q est un ensemble packing, et

b $X \cup Q$ est un ensemble dominant minimal de T, et

c $\gamma(T[V \setminus N[Q]]) = \alpha_0(T[V \setminus N[Q]])$.

Un algorithme polynômial

Nous donnons un algorithme calculant $\chi_d(T)$ pour un arbre arbitraire T [6].

Algorithme 1: Calcul de $\chi_d(T)$ d'un arbre T

Données : T (V, L) un arbre non trivial

Résultat : Le nombre chromatique dominant de T.

Calculer $\gamma(T)$, le nombre de domination de T ;

si *T est une étoile* **alors**
  retourner $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$

fin

$Q^* = N(S(T)) \setminus (S(T) \cup L(T))$;

$Q = \{x \in V \setminus Q^* : N(x) \subseteq Q^*\}$, Soit X l'ensemble transversal minimum de $T' = T[V \setminus N[Q]]$ contenant tous les supports ;

si *Q est un packing, $X \cup Q$ est un dominant minimum de T et X est un dominant minimum de T',* **alors**
  $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$;
  Colorer T comme suit :
  pour chaque $x \in Q$ **faire**
    Donner une nouvelle couleur aux sommets de $N(x)$;
  fin
  Donner la même nouvelle couleur aux sommets de $L(T) \cup Q$;
  Donner une nouvelle couleur à chaque support de T ;
  Donner une nouvelle couleur à chaque sommet de $X \setminus S(T)$;
  Donner aux sommets non colorés la même couleur donnée aux feuilles ;
  Sortir ;
sinon
  retourner $\chi_d(T) = \gamma(T) + 2$
fin

2.3 Quelques résultats existants sur Le nombre chromatique dominant

2.3.1 Le nombre chromatique dominant de quelques graphes élémentaires

Proposition 2.3.1 *[27] Le nombre chromatique dominat pour certaines classes de graphes.*

- L'étoile $K_{1,n}$ a $\chi_d(K_1, n) = 2$.
- Soit $K_{a,b}$ est double étoile pour $a + b \geq 4$, $\chi_d(K_{a,b}) = 3$.
- Une chaine p_n d'ordre n$\geq$ 3 a

$$\chi_d(p_n) = \begin{cases} 1 + \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ si } n = 2, 3, 4, 5, 7 \\ 2 + \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ sinon} \end{cases}$$

- Le graphe complet K_n a et $\chi_d(k_n) = n$.

Proposition 2.3.2 *[27] Le nombre chromatique dominant pour certaines classes de graphes.*

- Les cycles C_n a

$$\chi_d(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{si} \quad n = 4 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 & \text{si} \quad n = 5 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Multi -étoile $K_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ a $\chi_d(K_n(a_1, a_2, ..., a_n)) = n + 1$.
- La roue $W_{1,n}$ a

$$\chi_d(W_{1,n}) = \begin{cases} 3 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 4 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- Le graphe complet k-paretite $K_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ a $\chi_d(K_{a_1,a_2,\ldots,a_k}) = k$.
- Le graphe de Petersen $\chi_d(G) = 5$.

Théorème 2.3.1 *[27] Pour tout graphe d'araignée $K_{1,n}$ d'ordre $n \geq 1$. Alors*

$$\chi_d(K_{1,n}) = n + 1.$$

Lemme 2.3.1 *[15] Si G est une chenille, il y a une $\chi_d(G)$-coloration de G dans lequel les couleurs assinée aux sommets de degré au moins 3 sont distincts.*

Théorème 2.3.2 *[15] Si G est une chenille dans lequel sommet de degré inferieur á 3 sont indépendants, et si la colonne vertébrale de G contient exactement r sommet de degré au moins 3, alors*

$$\chi_d(G) = r + 1.$$

Théorème 2.3.3 *Soit G un graphe. Alors:*

- $\chi_d(G) = 1$ si seulement si G est K_1.
- $\chi_d(G) = 2$ si seulement si G est soit $\bar{K}_2$ ou $K_{r,s}$ avec $r \geq 1$ et $s \geq 1$.

2.3.2 Le nombre chromatique dominant d'un graphe biparti

Théorème 2.3.4 *[14] Soit G un graphe biparti. En suite il y a toujours un graphe de classe 1 qui contient G comme un graphe induit.*

Proposition 2.3.3 *[14] Soit G un graphe biparti d'ordre au moins 4. Alors*

$$\chi_d(G) = \gamma(G) \text{ si et seulement si } G \text{ est un graphe biparti partiellement complet.}$$

Proposition 2.3.4 *[14] Soit G un graphe biparti d'ordre au moins 2. Alors*

$$\chi_d(G) = 2 \text{ si seulement si } G = K_{m,n}.$$

2.3.3 Le nombre chromatique dominant du graphe central

Définition 2.3.1 *[21] Un graphe central $C(G)$ d'un graphe G est obtenu en subdivisant chaque arête de G exactement une fois et en joignant tous les sommets non adjacent de G.*

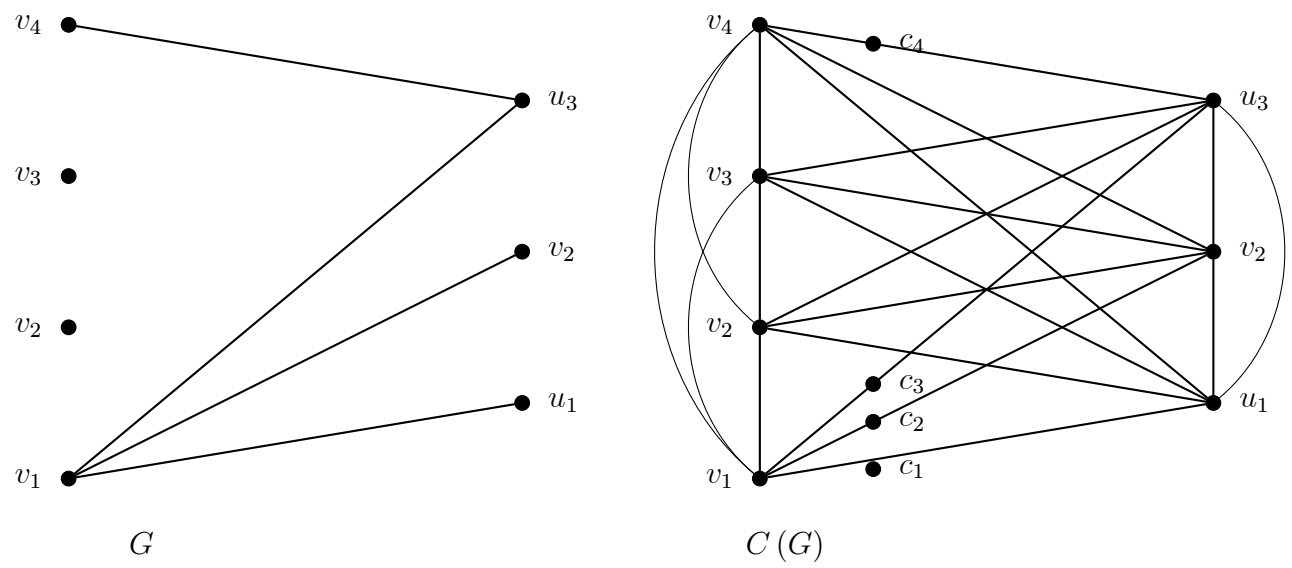


Figure 2.3.1 : Un graphe central C(G).

Biparti complet

Théorème 2.3.5 *[21] Pour un graphe biparti complet $K_{m,n}$ d'ordre m, $n \geq 1$,*

$$\chi_d\left[C\left(K_{m,n}\right)\right] = m + n.$$

Les chaines

Théorème 2.3.6 *[21]Une chaine p_n d'ordre $n \geq 2$,*

$$\chi\left[C\left(P_n\right)\right] = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \text{ si } n \text{ impair} \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \text{ si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Les cycles

Théorème 2.3.7 *[21] Un cycle C_n d'ordre $n \geq 3$,*

$$\chi\left[C\left(C_n\right)\right] = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 2 \text{ si } n{=}3 \\ \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La roue

Théorème 2.3.8 *[21] La roue $W_{1,n}$ d'ordre $n \geq 3$,*

$$\chi\left[C\left(W_{1,n}\right)\right] = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 3 \text{ si } n{=}3 \\ \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Graphe complet

Théorème 2.3.9 *[21] Un graphe complet K_n d'ordre $n \geq 3$,*

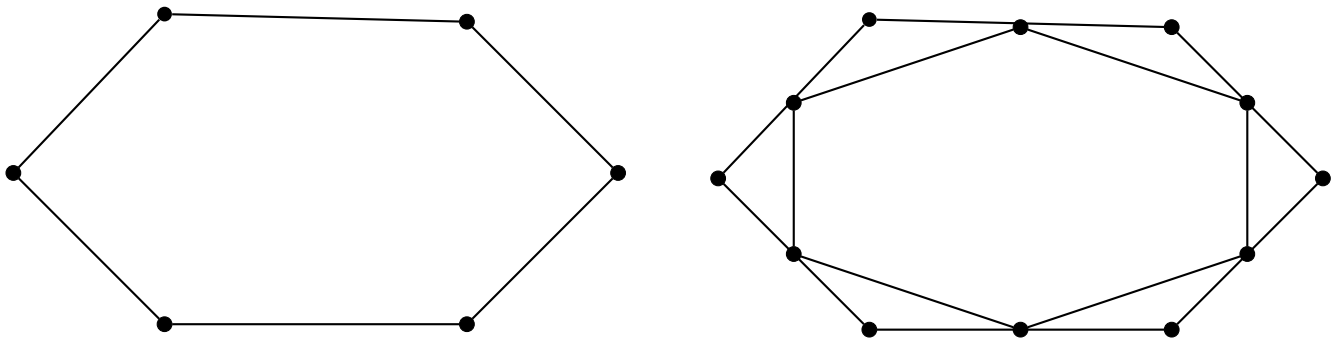
$$\chi\left[C\left(K_n\right)\right] = n + 1.$$

2.3.4 Le nombre chromatique dominant du graphe milieu et graphe total de quelques graphes élémentaires

Graphe milieu

Définition 2.3.2 *[27] Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$ est défini comme suit: L'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$: et deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- *$x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.*
- *$x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.*



C_6 $M(C_6)$

Figure 2.3.2 : Un graphe milieu M(G).

Lemme 2.3.2 *[27] Soit G un graphe tel que, $G = M(C_n)$ avec $n > 3$, alors*

$$\chi_d(G) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} + 2 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \frac{n}{2} + 2 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Théorème 2.3.10 *[27] Soit G un graphe tel que, $G = M(C_n)$ avec $n > 3$, alors*

$$\chi_d(G) = \begin{cases} \chi(G) + \gamma(G) - 2 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \chi(G) + \gamma(G) - 1 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Lemme 2.3.3 *Soit G un graphe tel que, $G = M(p_n)$ avec $n > 2$, alors*

$$\chi_d(G) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} + 2 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \frac{n}{2} + 3 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Théorème 2.3.11 *[27] Soit G un graphe tel que, $G = M(P_n)$ avec $n > 2$, alors*

$$\chi_d(G) = \chi(G) + \gamma(G) - 1.$$

Théorème 2.3.12 *[27] Pour une roue $W_{1,n}$ d'ordre $n \geq 3$,*

$$\chi_d[M(W_{1,n})] = n + 2.$$

Graphe total

Définition 2.3.3 *[24] Un graphe total de G, noté T(G), est défini comme suit. L'ensemble des sommets de T(G) est V(G) ∪ E(G), et deux sommets x, y de T(G) sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- *x, y ∈ V(G) et x, y sont adjacents dans G.*
- *x; y ∈ E(G) et x est adjacent à y dans G.*
- *x ∈ V(G), y ∈ E(G) et x est incident à y dans G.*

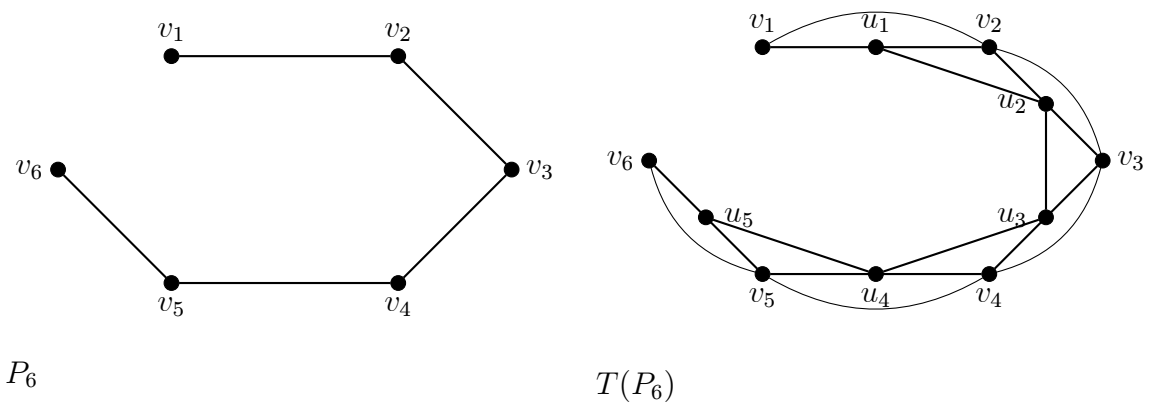


Figure 2.3.3 : Un graphe total T(G).

Théorème 2.3.13 *[24] Pour un cycle C_n d'ordre $n \geq 3$,*

$$\chi_d\left[T\left(C_n\right)\right] = \begin{cases} 2 + \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil & \text{si } n = 3 \\ 3 + \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.3.14 *[24] Pour une chaine P_n d'ordre $n \geq 3$,*

$$\chi_d\left[T\left(P_n\right)\right] = \begin{cases} 2 + \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil & \text{si } n = 3 \\ 1 + \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.3.15 *[24] Pour une roue $W_{1,n}$ d'ordre $n \geq 3$,*

$$\chi_d\left[T\left(W_{1,n}\right)\right] = n + 2.$$

2.3.5 Le nombre chromatique dominant de certains graphes

Le nombre chromatique dominante des graphes: livre, prisme croisé, bananier, arainée, scindé [21].

Définition 2.3.4 *Un graphe m-livre est défini comme un graphe du produit cartésien $S_{m+1}\times P_2$ où S_m est un étoile et P_2 est une chaine relié deux sommets. Il note par B_m. Un graphe du livre B_3 est illustré dans la figure suivant:*

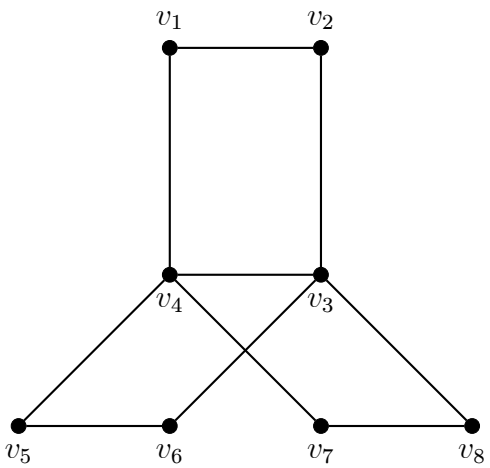


Figure 2.3.4 : Un graphe du livre (B_3) .

Théorème 2.3.16 *Pour tout graphe du livre B_n où $n \geq 3$, alors*

$$\chi(G) = n + 2.$$

Définition 2.3.5 *Un graphe de prisme n-croisé est un graphe obtenu en prenant deux cycles disjoints C_n et en ajoutant des arêtes (v_k, v_{2k+1}) et (v_k, v_{2k}) pour $k = 1, 2, ..., (n-1)$. Il note par G_n. Un graphe du prisme croisé G_2 est illustré dans la figure suivante:*

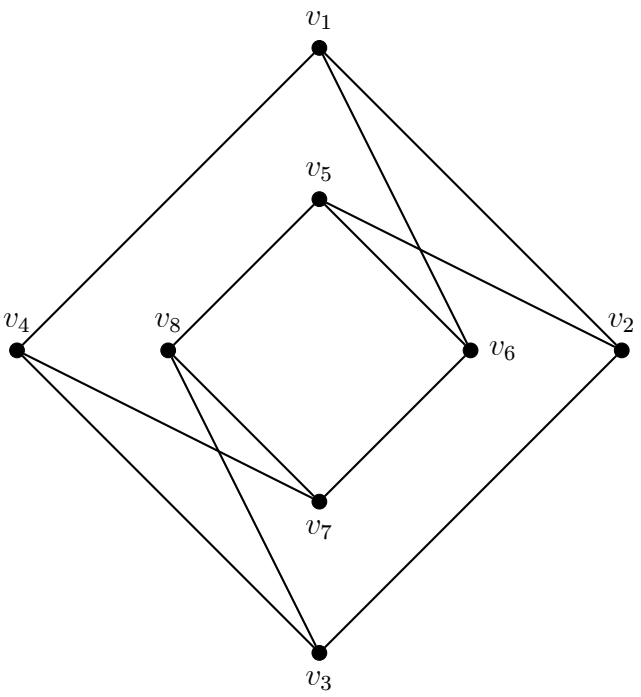


Figure 2.3.5 : Un graphe de prisme n-croisé.

Théorème 2.3.17 *Pour tout graphe de prisme n-croisé d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$\chi_d(G) = 2n + 1.$$

Définition 2.3.6 *Un arbre (n, k)-banana est un graphe obtenu en connectant une feuille de chacune des n copies d'un graphe k-star avec un seul sommet racine distinct de toutes les étoiles. Il est noté $B_{n,k}$. Un graphe banane $B_{2,4}$ est illustré dans la figure suivante:*

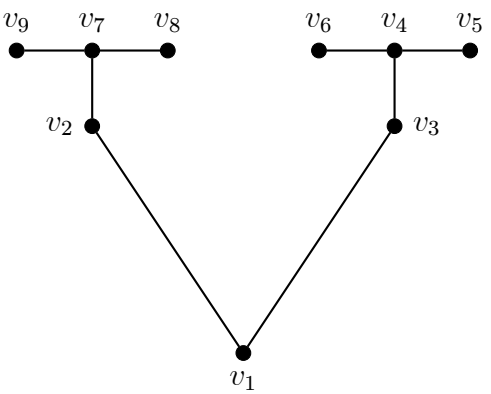


Figure 2.3.6 : Un graphe banane ($B_{2,3}$) .

Théorème 2.3.18 *Soit $B_{2,k}$ est un graphe de bananier d'ordre $k \geq 4$, alors*

$$\chi_d(G) = 4.$$

Chapitre 3

Nombre chromatique dominant de certains graphes particuliers

Dans ce chapitre, nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique dominant de certains graphes particuliers.

3.1 Le nombre chromatique dominant de prisme complémentaire des chaînes et des cycles

Définition 3.1.1 *Soit G un graphe. On appelle prisme complémentaire de G le graphe formé à partir de l'union disjointe de G et son complémentaire $\overline{G}$ en ajoutant les arêtes d'un couplage parfait entre les sommets correspondants G et $\overline{G}$.*

Proposition 3.1.1 *Pour tout n, on a*

$$\chi_d\left(P_n\overline{P_n}\right) = \begin{cases} n+1 \text{ Si } n \leq 7 \\ n \text{ Sinon.} \end{cases}.$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ avec $V(P_n) = \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, et soit $\overline{P_n}$ le complémentaire de P_n avec $V(\overline{P_n}) = \{u_j, 1 \leq j \leq n\}$. Soit $G = P_n\overline{P_n}$ le prisme complémentaire de P_n d'ensemble de sommets $V(G_n) = V(P_n) \cup V(\overline{P_n})$ et d'ensemble d'arêtes $E(G_n) = E(P_n) \cup E(\overline{P_n})$.

On distingue deux cas:

Cas 1: 3.1.1 Si $n \leq 7$. alors Si $n = 2$, alors le graphe $P_2\overline{P_2}$ est un P_4 d'après la Proposition 2.3.1, $\chi_d(G) = n+1$.Si $n = 3$, colorons v_1 et v_3 par 1, colorons v_2 et u_1 par 2, colorons u_2 par 3, colorons u_3 par 4. alors il facile de vérifié que $\chi_d(G) = 4 = n + 1$.

Si $4 \leq n \leq 7$. Nous donnons une χ_d-coloration de G, en utilisant $n + 1$ couleurs, comme suit:

- On affecte la couleur 1 aux sommets v_1, v_3, u_2. Nous affectons la couleur 2 aux sommets v_2 et u_1.
- Pour $4 \leq i \leq n$, colorons v_i par $i - 1$.
- Pour $3 \leq j \leq n - 2$, colorons u_j, par la couleur j.
- Colorons u_{n-1} par n, colorons u_n par $n + 1$. Par conséquent

$$\chi_d(G) \leq n + 1.$$

En outre, pour prouver l'égalité, nous montrons que $\chi_d(G) \geq n + 1$. Maintenant, pour démontrons l'égalité, il suffit de montrer $\chi_d(G) \geq n$. Il est claire que $\chi(G) \leq n$ et $\gamma(G) = n$. D'après le Théorème 2.2.3,

$$\chi_d(G) \geq n$$

$$n \leq \chi_d(G) \leq n + 1$$

Cas 2: 3.1.2 Si $n \geq 8$. Considérons la χ_d-coloration de $G = P_n\overline{P_n}$ avec n couleurs, comme suit:

- Colorons les sommets v_1, u_3, u_4 par la couleur 1. Colorons les sommets v_2, u_1 par la couleur 2.
- Affectons la couleur 3 au sommet u_2. Assignons la couleur 4 aux sommets v_3, u_5, u_6.
- Les sommets v_4, v_5, sont colorés par les couleurs 5, 6 respectivement. Colorons les sommets v_6, v_8, u_7 par la couleur 7.

- Colorons les sommets v_7, v_9, u_8 par la couleur 8. Pour $9 \leq i \leq n$, colorons le sommet v_i, par la couleur $i-1$.

- Pour $9 \leq j \leq n$, colorons le sommet u_j par la couleur j. Ceci implique que

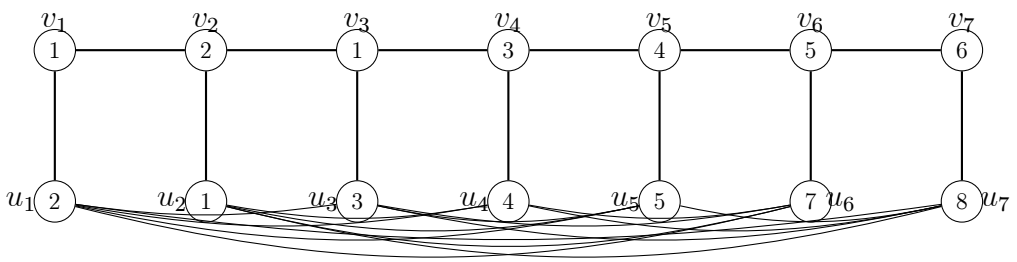
$$\chi_d(G) \leq n.$$

Maintenant, pour démontrons l'égalité, il suffit de montrer $\chi_d(G) \geq n$. Il est claire que $\chi(G) \leq n$ et $\gamma(G) = n$. D'après le Théorème 2.2.3, $\chi_d(G) \geq n$

D'ou

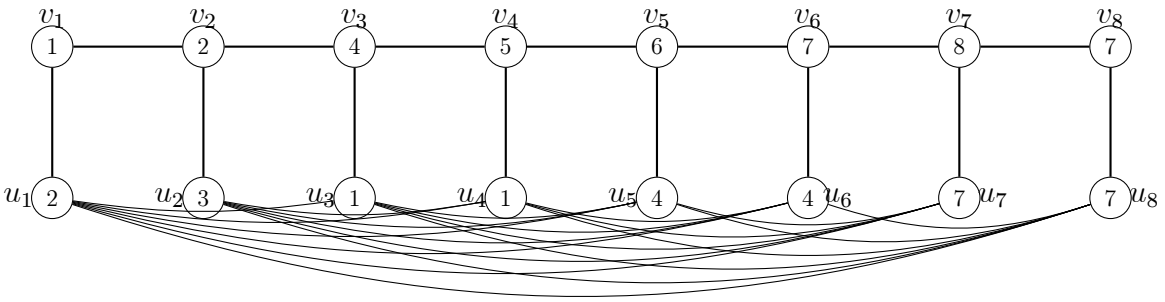
$$\chi_d(G) = n.$$

■



$\chi_d\left(P_7\overline{P_7}\right) = 8$

Figure 3.1.1 : Une coloration dominante de prisme complémentaire.



$\chi_d\left(P_8\overline{P_8}\right) = 8$

Figure 3.1.2 : Une coloration dominante de prisme complémentaire.

Proposition 3.1.2 *Pour tous n, on a*

$$\chi_d\left(C_n\overline{C_n}\right) = \begin{cases} n+1 \text{ si } n=3 \\ n \text{ sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit C_n une chaîne d'ordre $n \geq 3$ avec $V(C_n) = \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, et soit $\overline{C_n}$ le complémentaire de C_n avec $V(\overline{C_n}) = \{u_j, 1 \leq j \leq n\}$. Soit $G = C_n\overline{C_n}$ le prisme complémentaire de C_n d'ensemble de sommets $V(G_n) = V(C_n) \cup V(\overline{C_n})$ et d'ensemble d'arêtes $E(G_n) = E(C_n) \cup E(\overline{C_n})$.

On distingue deux cas:

Cas 1: 2.2.3 Si $n = 3$, on donne une coloration dominante avec 4 couleurs comme suit:

- Pour $1 \leq j \leq 3$, colorons u_j par la couleur 1.
- Pour $1 \leq i \leq 3$, colorons v_i par la couleur $i+1$.

  Ceci ipmlique que

$$\chi_d(G) \leq n+1.$$

Maintenant, pour montrons l'égalité, il suffit de montrer $\chi_d(G) \geq n+1$, alors il facile de vérifié que $\chi_d(G) = 4 = n+1$.

Cas 2: 2.2.3 Si $n \geq 4$. on donne une coloration dominante avec $n+1$ couleurs comme suit:

- On affecte la couleur 1 aux sommets v_1, v_3, u_2. Nous affectons la couleur 2 aux sommets v_2, u_1, v_n.
- Pour $4 \leq i \leq n-1$, colorons v_i par $i-1$.
- Pour $3 \leq j \leq n$, colorons u_j, par la couleur j.

  Ceci ipmlique que

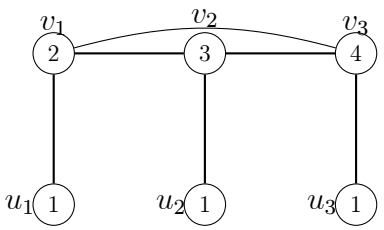
$$\chi_d(G) \leq n.$$

- Maintenant, pour montrons l'égalité, il suffit de montrer $\chi_d(G) \geq n$. Il est claire que $\chi(G) \leq n$ et $\gamma(G) = n$. D'après le Théorème 2.2.1, $\chi_d(G) \geq n$

D'où

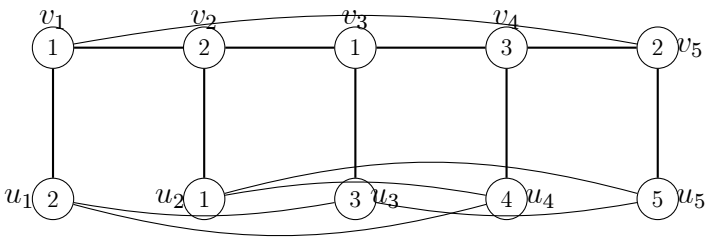
$$\chi_d(G) = n.$$

■



$$\chi_d\left(C_3\overline{C_3}\right) = 4$$

Figure 3.1.3 : Une coloration dominante de prisme complémentaire d'un cycle.



$$\chi_d\left(C_5\overline{C_5}\right) = 5$$

Figure 3.1.4 : Une coloration dominante de prisme complémentaire d'un cycle.

3.2 Le nombre chromatique dominant de produit croisé des chaînes

Proposition 3.2.1 *Pour tous n, on a*

$$\chi_d(P_2 \times P_n) \leq \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est impair} \\ n+1 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $G = P_2 \times P_n$. Il est claire que $G = G_1 \cup G_2$ tel que $G_1 = (V_1, E)$, $G_2 = (V_2, E)$. Soit $V_1 = \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$ et $V_2 = \{u_j, 1 \leq j \leq n\}$ alors $V = V_1 \cup V_2$.

On distingue deux cas:

Cas 1: Si n est impair, on donne une coloration dominante avec n couleurs comme suit:

- Pour i et j est impair, colorons v_i et u_j par la couleur 1.
- Pour i et j est pair , colorons v_i et u_j par les couleurs $2, 3...n$

  Ceci ipmlique que

$$\chi_d(G) \leq n.$$

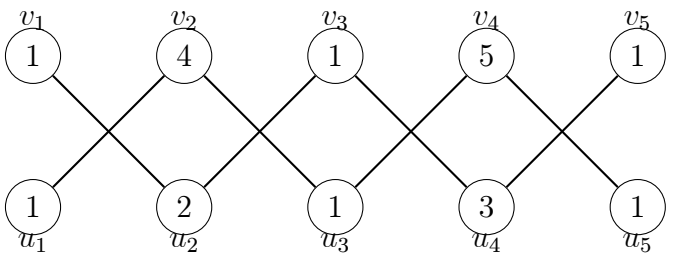
Cas 2: Si n est pair, on donne une coloration dominante avec $n+1$ couleurs comme suit:

- On affecte la couleur 1 aux sommets v_i et u_j, pour i et j est impair.
- Pour i et j est pair , colorons v_i et u_j par les couleurs $2, 3...n+1$

  Ceci ipmlique que

$$\chi_d(G) \leq n+1.$$

■



$$\chi_d(P_2 \times P_5) \leq 6$$

Figure 3.2.1 : Une coloration dominante de produit croisé d'une chaîne.

Proposition 3.2.2 *Pour tous n, on a*

$$\chi_d(P_3 \times P_n) \leq n+1.$$

Preuve. Soit $G = P_3 \times P_n$, un graphe non connexe On pose $V_1 = \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, $V_2 = \{u_j, 1 \leq j \leq n\}$ et $V_3 = \{v'_k, 1 \leq k \leq n\}$ les ensembles des sommets de

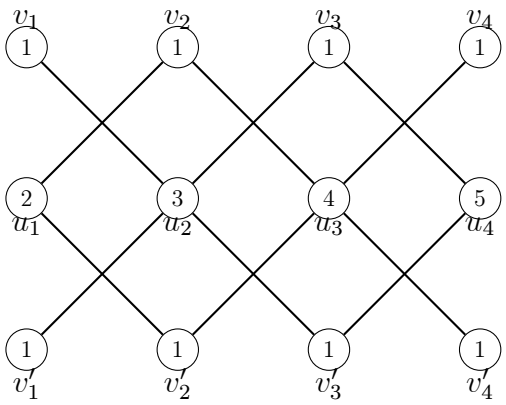
Pour montrer que $\chi_d \leq n + 1$, il suffit de donner une coloration dominante à $P_3 \times P_n$ avec $(n + 1)$ couleurs. Cela se fait comme suit:

- Colorons les sommets des ensembles V_1 et V_3 par la couleur 1
- Nous affectons la couleur 1 à tous les sommets des ensembles V_1 et V_3.
- Et pour l'ensemble V_2, nous assignons les couleurs $2, 3, \ldots, n + 1$, respectivement.

Alors $G = P_3 \times P_n$ possède $n + 1$ couleurs pour obtenir une coloration dominant, c'est-à-dire :

$$\chi_d (P_3 \times P_n) \leq n + 1$$

■



$$\chi_d (P_3 \times P_4) \leq 5$$

Figure 3.2.2 : Une coloration dominante de produit croisé d'une chaîne.

Chapitre 4

L'effet de la suppression d'une arête sur le nombre chromatique dominant

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre chromatique dominante $\chi(G)$ pour certaines classes particulières de graphes. Le nombre chromatique dominante $\chi(G)$ peut augmenter, ou diminuer ou rester inchangé lorsque le graphe G est modifié en supprimant une arête.

4.1 Graphe arête χ_d-critique

Dans cette section, nous allons étudier l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre chromatique dominante χ_d pour certaines classes particulières de graphes.

Le nombre chromatique dominante χ_d, peut augmenter, diminuer ou rester inchangé lorsque le graphe G est modifié en supprimant une arête.

Théorème 4.1.1 *Soit G un graphe, Soit $e = uv$ une arête de G, et soit C une χ_d- coloration de G. Alors*

$$\chi_d(G) - 1 \leq \chi_d(G - e) \leq \chi_d(G) + 1$$

Preuve. *Soit G un graphe, Soit $e = uv$ une arête de G, et soit C une χ_d- coloration de G tel que C_i, C_j, C_k, C_l, les classes de couleurs de C.*

1/ *Pour la borne supérieure:*

Quand on supprime une arête $e = uv$ tel que $u \in C_i$,et $v \in C_j$, on distingue trois cas:

1ère Cas: si u domine une classe C_k, et v domine une classe C_l.

Dans ce cas, C reste une coloration dominante de $(G-e)$, parce que chaque sommets u et v dominent une autres classes sauf les classes C_i, C_j respectivement. Donc

$$\chi_d(G-e) \leq \chi_d(G) \tag{4.1.1}$$

2ème Cas: si u domine une classe C_k, et v ne domine pas une autre classe de couleur (i.e v domine seulement la classe C_i).

Dans ce cas, la coloration dominante de G n'est pas une coloration dominante de $(G-e)$ car, quand on supprime l'arête $e = uv$, le sommet $v \in C_j$ ne domine aucune classe de couleur. Donc, pour obtenir une coloration dominante de $(G-e)$ on a besoin à une nouvelle classe de couleur C'_j, c'est -à-dire, il suffit que le sommet v domine eux même dans la classe C'_j. Alors

$$\chi_d(G-e) \leq \chi_d(G) + 1 \tag{4.1.2}$$

3ème Cas: si u et v ne dominent pas une autre classe.

La coloration dominante C de G dans ce cas, ne reste pas une coloration dominante de $(G-e)$, car les sommets u et v ne dominent aucune classe de couleurs, parce que le sommet u domine seulement la classe C_j, et la même chose pour le sommet v domine seulement la classe C_i. Donc, pour obtenir une coloration dominante de $(G-e)$ on a besoin à une nouvelle classe de couleur C'_i, c'est -à-dire, il suffit que le sommet u domine eux même dans la classe C'_i. Alors

$$\chi_d(G-e) \leq \chi_d(G) + 1 \tag{4.1.3}$$

Donc, D'après (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) on obtient:

$$\chi_d(G-e) \leq \chi_d(G) \leq \chi_d(G) + 1 \tag{4.1.4}$$

2/ *Pour la borne inférieure:*

Posons C' une $\chi_d(G-e)$ coloration dominante de $(G-e)$. Et soient C'_i, C'_j, C'_k, C'_l, les classes de couleures de C'.

Quand on ajoute une arête $e = uv$, on distingue deux cas:

$1^{ère}$ Cas: si $e = uv \in (G - e)$, tel que $u \in C_i^{'}, v \in C_j^{'}$, et l'un des deux sommets u, v dominent une autre classe.

dans ce cas, $C^{'}$ reste une coloration dominante dans G. Alors

$$\chi_d(G) \leq \chi_d(G - e) \tag{4.1.5}$$

$2^{ème}$ Cas: si $e = uv \in (G - e)$, tel que u, v appartient à la même classe $C_i^{'}$ (ou bien à $C_j^{'}$), et u domine la classe $C_k^{'}$ et v ne domine pas une autre classe (v domine seulement la classe $C_j^{'}$).

Cette coloration n'est pas dominante dans $(G - e)$ car, le sommet $v \in C_j^{'}$, ne domine aucune classe de couleur. Donc, pour obtenir une coloration dominante de $(G - e)$, on a besoin une nouvelle classe de couleur $C_j^{'\prime}$, c'est-à-dire, il suffit que le sommet v le seul sommet dans la classe C'', i.e domine eux même. Alors

$$\chi_d(G - e) \leq \chi_d(G - e) + 1 \tag{4.1.6}$$

Donc, d'après (4.1.5) et (4.1.6) on a:

$$\chi_d(G) \leq \chi_d(G - e) + 1 \Longrightarrow \chi_d(G - e) \geq \chi_d(G) - 1$$

Donc,

$$\chi_d(G) - 1 \leq \chi_d(G - e) \leq \chi_d(G) + 1$$

■

Définition 4.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, On dit que G est arête $\chi_d^{=}-$critique si*

$$\forall e \in E(G),\ \chi_d(G - e) = \chi_d(G)$$

Définition 4.1.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, On dit que G est arête $\chi_d^{-}-$critique si*

$$\forall e \in E(G),\ \chi_d(G - e) < \chi_d(G)$$

Définition 4.1.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, On dit que G est arête $\chi_d^{+}-$critique si*

$$\forall e \in E(G),\ \chi_d(G - e) > \chi_d(G)$$

Proposition 4.1.1 *Soit G un graphe $\chi_d^+(G)$-critique et c une coloration dominante de G avec χ_d-couleur avec $u \in C_i, v \in C_j$, alors*

u domine une seule classe C_j ou bien v domine une seule classe C_i.

Preuve. Soit G un graphe χ_d^+-critique, et soit c une coloration dominant de G avec χ_d-couleur. Soient $u \in C_i$ et $v \in C_j$, On suppose que u, v dominent une autre classe de couleur. Alors, quand on supprime l'arête $e = uv$ la coloration C reste une coloration dominante de $(G - e)$, alors

$$\chi_d(G - e) \leq \chi_d(G)$$

C'est-à-dire n'est pas χ_d^+-critique, contradiction. Donc il suffit que u domine une seul classe C_i ou bien v domine une seul classe C_j. ■

Proposition 4.1.2 *Un arbre T est χ_d^+-critique si est seulement si T est une étoile.*

Preuve. Condition suffisante: Soit T est une étoile, si on supprime une arête e alors le graphe partiel $G-e$ est l'union d'une étoile T_1 et un sommet isolé T_2. D'après le Proposition 2.2.3, $\max\limits_{1\leq i\leq 2} \chi_d(T_i) + 1 \leq \chi_d(T - e) \leq \sum\limits_{i=1}^{i=2} \chi_d(T_i)$. Comme $\chi_d(T_1) = 2$, $\chi_d(T_2) = 1$, alors $\chi_d(T - e) = 3$. D'où T est χ_d^+-critique.

Condition nécessaire: Soit T un arbre χ_d^+-critique. Supposons que T est différent d'une étoile. Ceci implique qu'il existe une arête $e = uv$ avec $d_T(u) \geq 2$, $d_T(v) \geq 2$. D'après L'algorithme 2.2.3 l'un des deux sommets u, v, disons u est le seul sommet de couleurs $c(u)$. On montre que la coloration dominante dans T obtenue en utilisant L'algorithme 2.2.3 reste une coloration dominante dans $T - e$. On distingue deux cas:

Cas 1: s'il existe un autre sommet de couleur $c(v)$, alors v est adjacent à un sommet v' tel que v' est le seul sommet de couleur $c(v')$. Comme u est seul sommet de couleur $c(u)$, alors u domine lui même. Comme v' est le sel sommet de couleur $c(v')$, v domine v'. Les autres sommets dominent les même classes de couleurs obtenues en appliquant L'algorithme 2.2.3 dans T.

Cas 2: Si v est le seul sommet de couleur $c(v)$, alors v domine lui même. Les autres sommets dominent les même classes de couleurs obtenues en appliquant L'algorithme 2.2.3 dans T.

Dans touts les cas, $\chi_d(T-e) \leq \chi_d(T)$. Par conséquent T n'est pas une arebe χ_d^+-critique. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous s'interéssons particulièrement à la notion de la coloration dominante, et le nombre chromatique dominant, et plus précisément sur les graphes: prisme complémentair d'une chaîne, d'un cycle et produit croisé d'une chaîne. Nous avons abordé la notion des graphes dites arête χ_d-critiques dont la suppression d'une arête quelconque d'un graphe a un effet sur son nombre chromatique dominant.

Bibliographie

[1] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnameurthy, The star graph: An attractive alternative to the n-cube, International Conference on Parallel Processing, pages 393-400, 1987.

[2] S Arumugam, Jay Bagga and K Raja Chandrasekar. On dominator colorings graphs, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 122, No. 4, November 2012, pp.561–571, Indian Academy of Sciences.http://dx.doi.org/10.1007/s12044-012-0092-5.

[3] S. Arumugam, K. Raja Chandrasekar, N. Misra, P. Geevarghese and S. Saurabh, Algorithmic Aspects of Dominator Colorings in Graphs. IWOCA 2011, LNCS 7056, (2011)19-30.

[4] C. Berge, Theory of Graphs and its Applications, no. 2 in Collection Universi-taire de Mathematiques, Dunod, Paris, 1958.

[5] J. A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph theory with Applications, London: MacMillan (1976).

[6] H. Boumediene Merouane and M. Chellali, On the dominator colorings in trees. Discussiones Mathematicae Graph Theory 32 (2012) 677-683.

[7] M. Chellali and F. Mafray, Dominator colorings in some classes of graphs. Graphs and Combinatorics 28 (2012) 97-107.

[8] G.H. Chen, M.T. Kuo and J.P. Sheu, An optimal time algorithm for nding a maximum weight independent set in tree. BIT Numerical Mathematics 28 (1988) 353-356.

[9] E. Cockayne, S. Goodman and S.T. Hedetniemi, A linear algorithm for the domination number of a tree. Information Processing Letters 4 (1975) 41-44.

[10] E. Cockayne, S. Hedetniemi, and S. Hedetniemi, "Dominating partitions of Graphs", Unpublished manuscript.

[11] Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.

[12] M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability, W. H. Free-man and Co., 1978

[13] R.M. Gera, On Dominator Colorings in Graphs, Graph Theory Notes of New York LIT, 25-30 (2007).

[14] R. Gera, On the dominator colorings in bipartite graphs. Information Technology: New Generations (2007) 947-952.

[15] R. Gera, S Horton, C. Rasmussen, Dominator Colorings and Safe Clique Partitions, Congressus Numerantium (2006).

[16] F. Harary, Graph Theory, Narosa Publishing 1969.

[17] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, Domination in Graphs: Advanced Topics, Marcel Dekker, New York, 1998.

[18] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, and A. A. McRae, Dominator Colorings of graphs, (2006). In preparation

[19] A. D. Jumani, L. Chand, "Domination Number of Prism over Cycle", Vol.44, pp. 237-238 2012.

[20] Kavitha, N G David, "Dominator Coloring on Star and Double Star Graph Families", International Journal of Computer Applications, pp. 22-25, 2012.

[21] K. Kavitha, N.G. David, "Dominator Coloring of Central Graphs" ,pp.0975 – 8887, Vol. 51, 2012.

[22] K. Kavitha & N. G. David, "Dominator coloring of some classes of graphs", 2012.

[23] Marcel Dekker, “Fundamentals of Domination in Graphs”, New York, 1998.

[24] D. Michalak, On Middle and Total graphs with Coarseness Number Equal 1, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1018: Graph Theory, Springer-Verlag, Berlin, 139 – 150 (1983).

[25] O. Ore, Theory of Graphs, no. 38 in American Mathematical Society Publica-tions, AMS, Providence, 1962.

[26] Ralucca Michelle Gera, On Dominator Colorings in Graphs, Department Of Applied Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey, CA 93943, USA.

[27] T.Ramachandran, A.Naseer Ahmed, “Dominator Coloring Number of Middle Graph”, IOSR Journal of Mathematics, Vol. 10, Iss. 6, Ver. IV, pp 38-40, December 2014.

[28] E. Sampathkumar and L. Pushpa Latha, “Strong, weak Domination and Domination Balance in a Graph”, Discrete Math. 161 (1996) 235-242.

[29] S. Sudha, G. M. Raja,”Equitable Coloring of Prisms and The Generalized Petersen graphs”, Vol. 2, Iss. 2, pp.105-112, 2014.

[30] L. Volkmann, "On graphs with equal domination and covering numbers" Discrete Applied Mathematics, 51, (1994), 211-217.