RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

Nawel Benchabane

NOMBRES ET THÉORIE DES NOMBRES :APPROCHE HISTORIQUE

Le mémoire évalué le 07 juillet 2021 Par le jury

Examinatrice :	Mme. Ait amrane N.Rosa	$M.A.A$	Université de Médéa
Examinatrice :	Mlle. Bendali Braham.A	$M.C.B$	Université de Médéa
Encadreur :	M.Hamza Halim Younes	$M.C.B$	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020-2021

Dédicace

Je dédie ce travail :

À mes chers parents qui n'ont jamais cessé
de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études.
Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et
reconnaissance.

À mes soeurs (Lamia, Nabila, Nadia et Karima),
mon frère (Mohamed said) et mon oncle maternel Omar,
À mes beaux frères (Mohamed, Said, Zohier et Youcef),
À mes nièces et mes neveux.

À tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux qui ont partagé avec moi les moments
d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement
supporté et encouragé tout au long de mon parcours.
À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je
souhaite plus de succés.

Merci !

- Nawel Benchabane

Remerciements

Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce présent travail.

Je tiens á remercier Mesieurs **Hamaza Halim Younes** d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience, de sérieux et de compétence. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes.

les remerciements pour les membres de jury aussi.

Mes sincéres remerciements á mes parents dont ce travail n'aurait pu aboutir sans leur inépuisable soutien et encouragement.

De tous mon coeur je remercie ma famille, qui par leur affection et bienveillance m'ont permis d'accomplir ce travail dans la sérénité.

Enfin je tiens á remercier tous mes amis pour leurs compréhension et encouragement dans la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace i

Remerciements ii

Introduction 1

1 Les triplets pythagoriciens 2

1.1 Plimpton 322 ou les triplets pythagoriciens chez les Babyloniens 3

1.2 Triplets pythagoriciens chez Euclide 6

1.3 Cas général 6

1.4 Cas des triplets primitifs 7

1.4.1 Théorème fondamental décrivant les triplets primitifs 8

1.4.2 Génération algébrique des triplets primitifs 10

2 Les Nombres premiers 11

2.1 208 Théorème fondamental de l'arithmétique 11

2.2 Les nombres premiers, Ibn al Haytham et le théorème de Wilson 12

3 Les Nombres parfaits 13

3.1 Euclide et Les nombres parfaits 13

3.2 Caractérisation des nombres parfaits chez Ibn al Haytham. 14

3.2.1 La tentative de preuve d'Ibn al Haytham :Rochdi Rashed, ... 14

3.3 La preuve d'Euler 15

4 Les nombres amiables 17

4.1 Le théorème de Thabit Ibn Qurra 18

4.2 Euler et les nombres amiables 19

5 Les fonctions arithmétiques **21**

5.1 Les fonctions arithmétiques d et σ 22

5.2 Fonctions multiplicatives 25

5.3 Fonction somme des diviseurs 26

5.4 Fonction d'Euler 28

5.5 Fonction de Möbius 29

Conclusion **31**

INTRODUCTION

Dans ce mémoire nous avons d'une part mis un peu de lumière sur la contribution des mathématiciens arabes dans la théorie des nombres. Beaucoup de résultats étaient attribués à des mathématiciens européens, alors qu'ils ont été découvert des siècle avant par des savants appartenant à la civilisation musulmane ; d'autre part nous avons situé ces découvertes dans le fil de l'évolution des concepts liés à la théorie des nombres. Nous avons étudié au chapitre 1 les triplets pythagoriciens et avons constaté que les Babyloniens les ont connus bien avant Pythagore et Euclide. Dans le chapitre 2, nous avons étudié le cheminement du concept des nombres parfaits à travers les civilisations anciennes, Grecque avec Euclide, Arabe avec Thabit ibn qurra et Ibn al Haytham, puis Européenne avec Euler. Nous avons consacré un chapitre sur les nombres premiers, en essayant de retracer le chemin depuis Euclide à Ibn al Haytham et al Farisi, Euclide montrant l'infinitude de ces nombres et la décomposition en produit de nombres premiers de tu entier, puis ibn al Haytham oeuvrant à établir un critère de reconnaissance d'un tel nombre, aboutissant à ce qui est connu actuellement sous le théorème de Wilson.

Les nombres amiables, étudiés essentiellement par Thabit ibn Qurra et kamal al din al farisi , puis par Euler font partie du $4^{ième}$ chapitre.

Dans le chapitre 5, nous avons introduit le savant Kamal al Dine al Farisi pour avoir été le premier à utiliser deux fonctions arithmétiques, la fonction somme des diviseurs propres, et la fonction nombre des diviseurs, pour vérifier le théorème de Thabit ibn Qurra sur les nombres amiables lorsque $n = 4$.

Et nous avons conclu sur la non exhaustivité des informations qu'il y a dans ce mémoire et qui si on essaie de s'élargir et approfondir les informations on pourrait aboutir en toute modestie à quelques publications, une pour chaque chapitre.

Chapitre 1

Les triplets pythagoriciens

Les triplets pythagoriciens

Un **triplet pythagoricien** est la donnée de trois entiers naturels tel que la somme des carrés des deux premiers entiers vaut le carré du troisième.
Par exemple, (3,4,5) est un triplet pythagoricien parce que :

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

On sait qu'il existe une infinité de triplets pythagoriciens. Autrement dit, on peut en donner autant qu'on veut. Cependant, en général, la somme des carrés de deux entiers n'est pas le carré d'un entier.
D'une manière plus algébrique, les triplets pythagoriciens sont les solutions rationnelles de l'équation

1.1 Plimpton 322 ou les triplets pythagoriciens chez les Babyloniens



L'origine de la Tablette

La tablette Plimpton 322 est une tablette d'argile de $12,7$ cm de largeur $\times 8,8$ cm de hauteur et 3,2 cm d'épaisseur maximum. Elle a été découverte lors de fouilles illégales et s'est retrouvée sur le marché des antiquités. L'éditeur new-yorkais George Arthur Plimpton (en) racheta vers 1922 cette tablette à Edgar J. Banks, un marchand qui avait été assyriologue, et la légua, avec le reste de sa collection, à l'université Columbia au milieu des années 1930. Selon Banks, la tablette provenait de Senkereh, un site du Sud de l'Irak où l'on situe l'antique cité de Larsa. En partie d'après le style de l'écriture cunéiforme, on estime que la tablette a été rédigée au plus tard en -16005 et vraisemblablement vers -1800 : Robson 2002 indique que cette écriture « est caractéristique des documents du sud de l'Irak s'il y a 3500 à 4000 ans ».. La tablette est publiée et traduite pour la première fois en 1945

par Otto Neugebauer et Abraham Sachs (Neugebauer et Sachs 1945). Elle est décrite par Neugebauer lui-même dans (Neugebauer 1951), qui est la source la plus fréquente des livres généralistes d'histoire des mathématiques publiés depuis. Elle a été depuis largement analysée, commentée, et interprétée : c'est la tablette d'argile sur laquelle le plus d'études avaient été publiées au moins jusque vers 2000 [13].

Les nombres dans la tablette

la tablette présente 4 colonnes et 15 lignes en numérotation sexagésimale positionnelle utilisée par les Babyloniens dans leur calculs. Chaque colonne est précédée d'un entête. La $1^{ière}$ colonne (de droite à gauche) donne les numérotations des lignes. Dans les 3 autres colonnes, chaque ligne contient un triplet pythagoricien

	LARGEUR a	DIAGONALE d	ORDRE
1:59:00:15	1:59	2:49	1
1:56:56:58:14:50:06:15	56:07	1:20:25	2
(1:)55:07:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
(1:)53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	4
(1:)48:54:01:40	1:05	1:37	5
(1:)47:06:41:40	5:19	8:01	6
(1:)43:11:56:28:26:40	38:11	59:01	7
(1:)41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	8
(1:)38:33:36:36	8:01	12:49	9
(1:)35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	10
(1:)33:45	45	1:15	11
(1:)29:21:54:02:15	27:59	48:49	12
(1:)27:00:03:45	2:41	4:49	13
(1:)25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	14
(1:)23:13:46:40	28	53	15

Les nombres de la deuxième colonne sont interprétés comme étant le plus petit coté d'un triangle rectangle ; ceux de la troisième colonne sont les hypoténuses donc il existe un rationnel tel que

$$a^2 + l^2 = d^2$$

En divisant les deux membres par le carré de l, on obtient : $(\frac{a}{l})^2 + 1 = (\frac{d}{l})^2$, et c'est la $4^{ième}$ colonne.

1.2 Triplets pythagoriciens chez Euclide

Le concept et l'étude des triplets pythagoriciens se trouve dans le livre 10 des Éléments d'Euclide, notamment le lemme 1 de la proposition 28.

Lemme 1.1 *décrire comment trouver deux nombres entiers carrés parfaits dont la somme l'est aussi*

preuve: [11] Dans la preuve de ce lemme Euclide décrit une méthode pour générer des triplets pythagoriciens comme suit :
Si $n > m$ et sont de même parité alors est pair , posons $k = \frac{n^2-m^2}{2}$, alors :

$$n^2m^2 + k^2 = (m^2 + k)^2$$
$$(nm)^2 + (\frac{n^2 - m^2}{2})^2 = (\frac{n^2 + m^2}{2})^2$$

Ce qui donne deux carrés dont la somme est aussi carrée
Cette démarche montre aussi que si $n > m$ et sont de même parité alors n et m génèrent les triplets suivants : $2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2$ ■

1.3 Cas général

Les deux formules connues grecques montrent qu'il existe une infinité de triplets pythagoriciens et que tout entier ≥ 3 fait partie d'un tel triplet (la premiére formule faisant intervenir $2n + 1$ et la deuxiéme $2n$)
Voici un théoréme donnant une formule générant l'ensemble de ces triplets.

Théorème 1.2 *Le triplet (a ,b ,c) est pythagoricien, si et seulement s'il existe deux entiers* $0 < q < p$ *tels que*

$$\frac{a}{c} = \frac{p^2 - q^2}{q^2 + q^2}$$

et

$$\frac{b}{c} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

la démonstration classique utilise une paramétrisation rationnelle du cercle unité [6].

preuve: Il est possible de paramétriser le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$, privé du point A (-1 , 0), á l'aide de la pente t de la droite passant par A et rencontrant le cercle en M(u , v). les coordonnées de M sont alors :

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

et

$$y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

En effet, la pente de (AM) étant t, on a $y = t(X + 1)$ et l'équation du cercle s'écrit alors

$$x^2 - 1 + t^2(x + 1) = 0$$

puis, aprés simplification par X+1, non nul, et regroupement des termes on obtient :

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

puis

$$y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Un triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs est pythagoricien si et seulement le point M de coordonnées $(a/c, b/c)$ est un point du cercle unité.
Cela se traduit par les conditions :

$$\frac{a}{c} = x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

et

$$\frac{b}{c} = y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

où t, pente de la droite (AM), est un rationnel q/p strictement compris entre 0 et 1, ce qui conclut. ■

1.4 Cas des triplets primitifs

Un triplet pythagoricien (a, b, c) est dit primitif si les trois entiers a, b et c sont premiers entre eux dans leur ensemble . ll suffit pour cela que deux d'entre eux le soient (puisqu'un

diviseur premier commun á deux des nombres divisera le troisiéme .
Il existe une infinité de triplets primitifs. les 16 premiers par ordre croissant de c sont ceux dont les trois termes sont inférieurs á 100 [19] :

$$(3,4,5)\quad (20,21,29)\quad (11,60,61)\quad (13,84,85)$$

$$(5,12,13)\quad (12,35,37)\quad (16,63,65)\quad (36,77,85)$$

$$(8,15,17)\quad (9,40,41)\quad (33,56,65)\quad (39,80,89)$$

$$(7,24,25)\quad (28,45,53)\quad (48,55,73)\quad (65,72,97)$$

Tout triplet pythagoricien (a, b, c) est,de maniére unique, produit d'un triplet pythagoricien primitif par un entier strictement positif : le pgcd de (a, b, c).
Si l'on divise par c^2, on obtient :

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$$

Autrement dit, les triplets pythagoriciens primitifs correspondent univoquement aux points du cercle unité á coordonnées rationnelles donnés sous forme irréductible par $(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$.

1.4.1 Théorème fondamental décrivant les triplets primitifs

Si (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif alors (b, a, c) aussi, et a ou b est impair. Le théorème suivant caractérise donc tous ces triplets .
Il y a équivalence [3][16][17] entre

- (i) (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif avec α impair .
- (ii) Il existe un couple de nombres $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$ avec p > q, p et q premiers entre eux et de parités différentes, tels que
  $a=P^2-q^2$, $b=2pq$ et $c=p^2+q^2$

preuve: D'après la forme générale des triplets pythagoriciens , ceux qui sont primitifs sont les triplets de la forme

$$a=\frac{p^2-q^2}{d},b=\frac{2pq}{d}$$

et sans perte de généralité, p et q premiers entre eux, si bien que d est égal á 1 ou 2 , selon que p et q sont de parités différentes ou de même partie .

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si de plus a est impair alors p et q sont de parités différentes (car s'ils étaient tous deux impairs, a serait pair, comme quotient par $d = 2$ d'un entier divisible par 4). Il s'ensuit que $d = 1$ d'où (ii).
- (ii) $\Rightarrow$ (i) : Réciproquement, supposons (ii) .(a, b, c) est de la forme ci-dessus avec $d = 1$ et $a = \frac{p^2-q^2}{1}$ impair, d'où(i).

■

Remarque 1.3 .

- *La famille* $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ *était connue d'Euclide [2].*
- *pour un triplet primitif (a, b, c) avec a impair, le couple (p, q) est unique :*

$$p = \sqrt{\frac{a+c}{2}}, q = \sqrt{\frac{c-a}{2}}$$

.

- *Le cas* $q = 1$ *et p pair implique que tout nombre multiple de 4 : 2p* $\geqslant$ *4 fait partie d'au moins un triplet primitif :* $(p^2 - 1, 2p, p^2 + 1)$ *(famille "de platon" donnée ci-dessus).*
- *En posant* $m = p + q$ *et* $n = p - q$*, une reformulation de ce théorème est :*

Théorème 1.4 *(a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif avec a impair si et seulement s'il existe deux entiers impairs premiers entre eux* $m > n \geqslant 1$ *tels que*

$$a = mn, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad et \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}.$$

- *Le cas* $n = 1$ *implique que tout nombre impair* $m \geqslant 3$ *fait partie d'au moins un triplet primitif :*
  $(m, (m^2 - 1)/, (m^2 + 1)/2)$ *(famille équivalente á celle de Pythagore donnée ci-dessus).*

1.4.2 Génération algébrique des triplets primitifs

Berggren[1] a montré en 1934 que tout triplet pythagoricien primitif peut être obtenu á partir du triplet (3,4,5) par application répétée de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$, avec :

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

De plus, cette décomposition est unique [18].

Chapitre 2

Les Nombres premiers

Existence d'une infinité de nombres premiers, Euclide le prouva le premier, en utilisant un raisonnement par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers : Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers premiers....

2.1 208 Théorème fondamental de l'arithmétique

Proposition 2.1 ***Euclide , les Éléméents, livre 7 proposition 30***
Si deux nombres en se multipliant forment un nombre et qu'un nombre premier mesure le produit, alors il mesure l'un de ses deux nombres originaux. Dans le langage actuel : si un nombre premier p divise un produit ab alors il divise a ou b

preuve: [7] ■

Proposition 2.2 ***Euclide , les Éléments, livre 7 proposition 31*** *Tout nombre composé est mesuré par un nombre premier dans la terminologie moderne : tout nombre entier supérieur à un est divisé de manière égale par un nombre premier.*

preuve [8]

Proposition 2.3 ***Euclide, les Éléments ,livre 7 proposition 32***
Tout nombre est premier ou est mesuré par un nombre premier.

preuve [9]

Proposition 2.4 ***Euclide, les Éléments, livre 9 proposition 14***

Si un nombre est le plus petit qui soit mesuré par des nombres premiers, il ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, à l'exception de ceux qui le mesurent à l'origine Dans la terminologie moderne : un plus petit commun multiple de plusieurs nombres premiers n'est pas un multiple d'un autre nombre premier. Livre IX, la proposition 14 est dérivée du Livre VII, proposition 30, et prouve en partie que la décomposition est unique.

preuve [10]

2.2 Les nombres premiers, Ibn al Haytham et le théorème de Wilson

Dans sa tentative de résoudre le problème des restes chinois, consistant à trouver un x tel que $x \equiv 1[m_i]$ et $x \equiv 0[p]$ avec p premier et $1 \leq m_i \leq p-1$ et dans le cheminement de son investigation il donna le critère suivant :
si $n > 1$ alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. n est premier
2. $(n-1)! \equiv -1[n]$

La formulation d'Ibn al Haytham traduite en anglais est comme suit (Roshdi Rashed) :

This propertyis necessary for every prime number, that is,for every prime number that is a number wich is a multiple only of one, if one multiplies a numbers that precede it by the others in the way we have specified, and if one adds one to the product, and if one divide the sum by each of the numbers that precede the prime number, only one remains, and if one divides by the prime number nothing remains.

Ibn al Haytham ne prouva pas cette conjecture. Elle fut attribué à Wilson qui n'en possédait pas la preuve, mais cette attribution fut ébranlée par les manuscrits de Leibnitz ; mais ce théorème ne fut prouvé qu'au $18^{ième}$ siècle, par Lagrange en donna deux preuves, Euler et Gauss.

Chapitre 3

Les Nombres parfaits

3.1 Euclide et Les nombres parfaits

Dans le livre 9 des Éléments , Euclide, au $3^{ième}$ siècle avant Jesus, a démontré que si $2^p - 1$ est premier alors $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait. Apres lui , Al Hasan Ibn al Haytham(965-1039) tenta de prouver la réciproque. Au $18^{ième}$ siècle Leonhard Euler$(1707 - 1783)$ a pu prouver que tout nombre parfait pair est de la forme proposée par Euclide. Donc la recherche des nombre parfait se réduit à la recherche des nombres premiers de la forme 2^{p-1}, nombres qu'on appelle nombre de Mersenne.

Proposition 3.1 ***Proposition 36 du livre 9 des Éléments d'Euclide***
Si la somme d'un nombre quelconque de termes de la forme $1+2, +2^2+...+2^{n-1}$ *est un nombre premier et si on multiplie cette somme par* 2^{n-1} *alors le résultat est un nombre parfait.*

preuve [12]
Résumé de la preuve :
Euclide commence par supposer que la somme $1+2, +2^2+...+2^{n-1}$ est un nombre premier.
En notant cette somme, il essaie de prouver que $s2^{n-1}$ est un nombre parfait.
Il cherche les diviseurs propres de ce nombre, et observe qu'ils apparaissent sous forme de deux suites :

$$1, 2, , 2^2..., 2^{n-1}$$

$$s1, s2, s2^2, ..., s2^{n-2}$$

Puis il montre que ceux sont les seuls diviseurs propres de $s2^{n-1}$.

3.2 Caractérisation des nombres parfaits chez Ibn al Haytham.

Dans la forme Euclidienne des nombres parfaits, si on remplace n par 2 ou par 3 on obtient deux nombres parfaits 6 et 28, mais si on remplace n par 4 on obtient 15 et 15 n'est pas un nombre premier. Donc dans la proposition d'Euclide. Il est nécessaire que $2^n - 1$ soit un nombre premier. Mais on ne savait pas si la condition était suffisante. Mais il semble aussi que tous les nombres parfaits s'obtiennent par la formule et sous la condition d'Euclide. Euler au $18^{ième}$ siècle réussit à montrer la suffisance de la condition. Mais sept siècle avant lui, al Hasan Ibn al Hasan Ibn al Haytham tenta de prouver en vain la suffisance de la condition.

3.2.1 La tentative de preuve d'Ibn al Haytham :Rochdi Rashed,

Si n est un nombre pair et $s(n)$ la somme des diviseurs propres de n alors les deux propositions suivantes sont équivalents :

1. Si $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$ et $(2^{p+1} - 1)$ est premier alors $s(n) = n$
2. Si $s(n) = n$ alors $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$ et $(2^{p+1} - 1)$ est premier

Dans sa tentative de preuve, Ibn al Haytham réussit à montrer qu'une partie de la preuve à savoir que parmi tout les nombres pairs de la forme $2^q(2^{p+1} - 1)$ seuls ceux ayant la forme Euclidienne sont parfaits.
Ibn al Haytham [15] commence par prouver que $s(2^p) = 1 + 2 + ... + 2^{p-1} = 2^p - 1$
Puis il démontre par l'absurde que pour tout nombre parfait pair n : $n = s(n) \neq 2^p$
Il montre ensuite que si $n = 2^p g$ avec $g = 2^{q+1} - 1$ alors $n - g = g + 2^g + ... + 2^{p-1}g$ Et pour n parfait on obtient $s(n) = n = (g + 2^g + ... + 2^{p-1}g) + (1 + 2 + ... + 2^q)$

Notons D1 et D2 les deux ensembles de diviseurs $g, 2^g, ..., 2^{p-1}g \; et \; 1, 2, ..., 2^q$, Ibn al Haytham montre par l'absurde que p=q.

3.3 La preuve d'Euler

Euler dans sa preuve utilise la multiplicativité de la fonction somme des diviseurs, c'est-à-dire que si a et b sont premiers entre eux alors $\sigma(ab) = \sigma(a).\sigma(b)$. Ici la fonction σ calcule la somme de tous les diviseurs, pas uniquement les diviseurs propres, sinon la multiplicativité n'est pas valide.
Pour la suffisance :
Si $2^p - 1$ est premier alors $2^p - 1$ et 2^{p-1} sont premiers entre eux et on a : $\sigma(2^{p-1}(2^p - 1) = \sigma(2^{p-1}).\sigma(2^p - 1) = (1 + 2 + ... + 2^{p-1})(1 + (2^p - 1)) = 2.2^{p-1}(2^p - 1)$ Ce qui prouve que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.
Pour la condition nécessaire :
Supposons qu'un nombre parfait pair y est donné, factorisant la plus grande puissance de 2 possible, on écrit donc $y = 2^k x$ ou x est impair. Pour que y soit parfait il faudrait que $\sigma(y) = 2y$, autrement dit :
$2^{k+1}x = \sigma(2^k)\sigma(x) = (2^{k+1} - 1)\sigma(x)$ donc $2^{k+1} - 1$ doit diviser x, donc le nombre $d = \frac{x}{2^{k+1}-1}$ est un diviseur propre de x donc on a, $\sigma(x) = x + d +$ autres diviseurs, or 2^{k+1} $d = x + d = \sigma(x)$ donc il n'y a pas d'autres diviseurs de x autres que x est d donc d=1 et donc $x = 2^{k+1} - 1$ est un nombre premier (il n'a que deux diviseurs) et $y = 2^k(2^{k+1} - 1)$.

Remarquons que les nombres parfaits étudiés par Euclide et Ibn al Haytham sont pairs. On ne sait pas actuellement s'il existe des nombres parfaits impairs, néanmoins Euler étudia certaines propriétés de ces nombres s'ils existaient. Si on arrive à trouver deux propriétés de ces nombres qui se contredisent, on peut alors conclure à leur non existence.R

On peut voir qu'un nombre parfait impair n'est jamais une puissance d'un nombre premier, en effet s'il était ainsi alors $\sigma(p^n) = 1 + p + ... + p^n = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} < \frac{p}{p-1}p^n$ et comme p est plus grand ou égal à 3 alors $\frac{p}{p-1} < \frac{3}{2}$ d'où $\sigma(p^n) < 2p^n$ donc p^n n'est pas parfait.
Euler a établi le premier résultat non trivial sur les nombres parfaits impairs :

Théorème 3.2 *Tout nombre parfait impair n est de la forme $p^t s^2$ avec p nombre premier congru à 1 modulo 4 et aussi congru à 1 modulo 4 et s un entier naturel impair supérieur 0 égal à 3 et aussi premier avec p.*

preuve: [4] Dans sa démonstration Euler utilise la multiplicativité de la fonction somme des diviseurs, le théorème fondamental de l'arithmétique (décomposition en produit de puissances de facteurs premiers) et les règles de congruences ; en écrivant $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$, et en supposant que $\sigma(p_1^{n_1})$ est pair sans être multiple de 4, on peut le faire car $\sigma(n) = 2n$; il montre que $k \geqslant 2$, que $p_1 \equiv n_1 \equiv 1[4]$, que $n_i \equiv 2[4]$ pour tout $k \geq i \geq 2$. Il pose alors $t = p_1, t = n_1$ et $s = p_2^{\frac{n_2}{2}} ... p_k^{\frac{n_k}{2}}$ il obtient la forme recherchée.

La recherche sur les nombres parfaits impairs se poursuit et nous pouvons citer certains résultats :
Tout nombre parfait impair est congru à 1 modulo 4
Tout nombre parfait impair possède au moins 10 facteurs premiers distincts(obtenu en 2015)
Un nombre parfait impair ne pourrait être un multiple de 105
Un nombre parfait impair est supérieur à 10^{1500}(obtenu en 2012)
etc. ■

Chapitre 4

Les nombres amiables

Notons par $s(a)$ la somme des diviseurs propres de a
On dit que les deux nombres a et b sont amiables si et seulement si $s(a) = b \ et \ \ s(b) = a$
La plus petite paire de nombres amiables est $(220; 284)$, en effet
$s(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$
$s(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$
A titre d'exemple, les cinq premières paires de nombres amiables sont :
(220 ; 284),(1184 ; 1210),(2620 ; 2924),(5020 ; 5564),(6232 ; 6368).

On ne sait pas s'il existe une infinité de nombres amiables. On attribue la découverte des nombres amiables à Pythagore, mais sans références acceptables ; le philosophe Jamblique $(250 - 330)$ affirme que les pythagoriciens associaient à ces paires de nombres des influences sur les relations de sociabilité.

Ibn Khaldoun affirme que les nombres 220 et 284 sont utilisés dans l'art des talismans pour induire une relation d'amour ou d'amitié entre deux personnes.

Dans son traité sur les nombres amiables, Thabit Ibn Qurra se réfère à Euclide, Pythagore et Nicomaques de Gérase. Il confirme Euclide dans la découverte de la règle de génération de nombres parfaits et de sa preuve, et il affirme qu'aucun des trois auteurs mentionnés ci-dessus ne traita des nombres amiables.

Thabit Ibn Qurra étudia ses nombres découvrit et prouva la validité d'une règle permettant de générer de tels paires de nombres. Au $14^{ième}$ siècle Ibn al Banna Al Murrakushi et Kamal al-Din al Farisi calculèrent indépendamment l'un de l'autre deux autres paires de nombres amiables par les formules de Thabit notamment la paire $(17296; 18416)$. Deux siècles plut tard, en 1636, Fermat adresse une lettre à Mersenne pour lui annoncer la découverte de cette même paire. Au $17^{ième}$ siècle Mohamed BaqirYazdi découvrit la paire $(9363584; 9437056)$. Quelques années après, Dans une lettre à Mersenne toujours, descartes annonces la paire de Yazdi.

Les Formules de Thabit Ibn Qurra ne donnent pas toutes les paires de nombres amiables, la paire $(6232; 6368)$ n'est pas calculable par les formules de Thabit. Actuellement à ce jour, du mois de Juin (Wikipédia), on connait plus de $1.226.927.085$ paires de nombres amiables, grâce à la puissance de calcul des ordinateurs ; en 2016 ; on a pu calculer toute les paires de nombres amiables majorées par 10^{18}.

4.1 Le théorème de Thabit Ibn Qurra

Théorème 4.1 *Si $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \times 2^n - 1$, et $r = 9 \times 2^{n-1} - 1$ avec $n > 1$ et p, q et r premiers , alors les nombres $2^n\ pq$ et $2^n r$ sont amiables.*

Thabit Ibn Qurra utilisa 9 lemmes pour arriver à prouver ce théorèmes, parmi eux figurent un résultat qui généralise la règle d'Euclide sur la génération des nombres parfaits, c'est le lemme 5

Lemme 4.2 *Si p est premier et $a = 2^n$ p alors $s(a) = 2^n - 1 + 2^n p - p$ et de plus :*

i) Si $p = 2^{n+1} - 1$ alors a est parfait

ii) Si $p < 2^{n+1} - 1$ alors a est abondant

iii) Si $p > 2^{n+1} - 1$ alors a est déficient

Les nombres abondants sont les nombres plus petits que la somme de leurs diviseurs, et les nombres déficients sont ceux plus grands que la somme de leurs diviseurs.

Autrement dit a est abondant si et seulement si $s(a) > a$ et a est déficient si et seulement si $s(a) < a$.

Dans son livre Al badi fil hisab, al Karaji consacre un chapitre sur les nombres amiables et conclut par le résultat suivant :

Résultat :

Si d et e sont deux nombres amiables alors l'un est abondant et l'autre déficient et

$$e - s(e) = d - s(d).$$

4.2 Euler et les nombres amiables

Euler découvrit une règle permettant de générer des nombres amiables ; cette règle est une généralisation de la règle de Thabit Ibn Qurra.

Règle d'Euler :

Si $p = (2^{n-m} + 1)2^m - 1, q = (2^{n-m} + 1)2^n - 1$ et $r = (2^{n-m} + 1)^2 2^{n+m} - 1$ où $n > m > 0$ et p, q, et r premiers , alors les nombres $2^n pq$ et $2^n r$ sont amiables.

Dans le calcul de la somme des diviseurs Euler considère tous les diviseurs propres et le nombre lui-même : $\sigma(a) = \Sigma_{d/a\ et\ d \leq a} d$. C'est cette même fonction arithmétique qu'il a utilisé pour prouver la réciproque du théorème d'Euclide sur les nombres parfaits.

Euler Découvrit 58 autres paires de nombres amiables, on ne connaissait que 3 paires avant lui.

Actuellement, il existe plusieurs concepts dérivants du concept de nombres amiables :

Les n-uplets amiables

Une paire de nombres (m, n) amiables satisfait à la relation $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$.

Cette règle peut être généraliser pour des triplets, des quadruplets et de façon générale on dit que la n-uplet $(n_1, n_2, ..., n_k)$ est un n-uplet de nombres amiables si et seulement si

$$\sigma(n_1) = \sigma(n_2) = ... = \sigma(n_k) = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

C'est n-uplet existe vraiment, on a par exemple les triplets de nombres amiables $(1980, 2016, 2556)$

On a aussi le quadruplet de nombres amiables suivants :

$(327\,0\,960;\ 336\,1\,680; 346\,1\,040;\ 383\,4\,000)$.

Les nombres sociables

Les nombres sociables sont des suites finies de nombres entiers telles que le suivant est égale à la somme des diviseurs du précédent, symboliquement on a comme définition : $n_1, n_2, ..., n_k$ est une suite de nombres sociables si et seulement si on a :

$$n_2 = \sigma(n_1),\ n_3 = \sigma(n_2),\ n_k = \sigma(n_{k-1})$$

On parle de nombres sociables de cycle $k-1$

Sous cette définition les nombres amiables sont des nombres sociables de cycle de longueur 1.

De telles suites de nombres existent, on a par exemple la suite de nombres sociables de cycle de longueur 4 :

$$1264460 \to 1547860 \to 1727636 \to 1305184 \to 1264460$$

Chapitre 5

Les fonctions arithmétiques

(Roshdi Rashed). Nous avons vu lors de l'étude des nombres parfaits qu'Euler ($18^{ième}$ siècle), pour prouver la réciproque du théorème d'Euclide sur la génération des nombres parfaits, utilisa la propriété de la multiplicativité de la fonction somme des diviseurs de manière explicite. Mais l'inspection de certain manuscrit inhérent à la civilisation musulmane, datant du $14^{ième}$ siècle dévoile l'utilisation de cette propriété de manière implicite chez le savant Kamal al Dine al Farisi. Nous allons voir comment il l'a fait. La littérature commune attribue à Fermat$(1601 - 1665)$ la découverte du couple $(17296; 18416)$ de nombres amiables ; ce couple se déduit des formules de Thabit ibn Qurra pour $n = 4$. L'analyse du traité de Thabit ibn Qurra montre que ce dernier calcula ce couple. Kamal al Dine al Farisidans son tadhkirat al ahbab fi bayan al thahabent reprit de calculer ce couple en détaillant les étapes de ses calculs. Dans cette entreprise il caractérisa deux types de fonctions arithmétiques, la fonction somme des diviseurs et la fonction nombre des diviseurs . En remplaçant n par 4 dans les formules de Thabitil utilisa la caractérisation de la fonction somme des diviseurs

- Si $n = 4$ on a : $a = 3 \times 2^3 - 1 = 23$; $b = 3 \times 2^4 - 1 = 47$; $c = 9 \times 2^7 - 1 = 1151$
- Si $n = 4$ on a : $a = 3 \times 2^3 - 1 = 23$; $b = 3 \times 2^4 - 1 = 47$; $c = 9 \times 2^7 - 1 = 1151$
  - Si $n = ab$ et si $pgcd(a, b) = 1$ alors $s(n) = a.s(b) + b.s(a) + s(a).s(b)$
  - Si $n = ab$ et a premier et si $pgcd(a, b) = 1$ alors $s(n) = a.s(b) + b + s(a).s(b)$
  - Si $n = p^r$ et p premier alors $s(n) = 1 + p + ... + p^{r-1} = \frac{p^r-1}{p-1}$

Ces trois formules étaient attribuées à Descartes.

Néanmoins, al Farisi tenta en vain de trouver une formule pour le calcul de $s(n)$ lorsque $n = ab$ et si $pgcd(a, b) \neq 1$.

Il appliqua la $1^{ière}$ formule pour le calcul de $s(2^k p)$ avec p premier ou produit de nombre premeir ; on obtient

$$s(2^k p) = ps(2^k) + s(2^k)s(p) + 2^k s(p)$$

Donc $s(17296) = s(2^4 \times 23 \times 47) = 23 \times 24 \times 15 + 15 \times 71 + 16 \times 71 = 18416$

Et $s(18416) = s(2^4 \times 1151) = 1151 \times 15 + 15 + 16 = 17296$.

Il caractérisa aussi la fonction $\tau(n)$ qui calcule le nombre de diviseurs de n : Si $n = p_1 p_2 ... p_r$ avec $p_1 p_2, ..., p_r$ premiers distincts, alors le nombre de diviseurs propres de
n, que l'on note $\tau_0(n)$ est égale à

$$1 + \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} r \\ r-1 \end{pmatrix}$$

Cette formule était attribuée à Abbé Didier (1739)

Si $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_r^{e_r}$ alors $\tau(n) = \Pi_1^r (e_i + 1)$ avec $\tau(n) = 1 + \tau_0(n)$

Cette formule était attribuée à John Kersey et à Monmort [14].

5.1 Les fonctions arithmétiques d et σ

En Mathématiques, une fonction arithmétique est simplement une fonction $\mathfrak{f} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Certaines de ces fonctions ont des propriétés très riches, ce qui permet -en les utilisant- de résoudre certains problèmes d'arithmétiques et de la théorie des nombres. Parmi les fonctions arithmétiques les plus utiles, nous citons :

1. La fonction "nombres de diviseurs", notée d. Cette fonction associe á tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre des diviseurs de n. On a par exemple d(12) = 6 puisque le nombre 12 posséde 6 diviseurs qui sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12
2. La fonction "somme des diviseurs", notée σ. Cette fonction associe á tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de tous les diviseurs de n On a par exemple $\sigma(12) = 28$ puisque la somme de tous les diviseurs de 12 donne 28.

3. La fonction "nombre de facteurs premiers distincts", notée ω. Cette fonction associe á tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre naturel $\omega(n)$, défini par :
   $\omega(n) := Card\{p\, premier, p\, divisen\}$.
   En particulier, on a $\omega(1)$ =0.
4. La fonction "nombre de facteurs premiers, comptés avec leurs multiplicités", notée Ω. Cette fonction associe á tout $n \in \mathbb{N}^*$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ (avec k,$\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$ et $p_1, ..., p_k$ des nombres premiers tous distincts [5] , le nombre $\Omega(n)$ défini par :

   $$\Omega(n) := \alpha_1 + ... + a_k.$$

   En particulier, on a $\Omega(1) = 0$.
5. La fonction "indicatrice d'Euler", notée φ. Cette fonction associe á tout $\in \mathbb{N}^*$, le nombre des entiers strictement positifs qui sont $\leq n$ et premiers avec n.
   On a par exemple $\varphi(12) = 4$ car les entiers strictement positifs qui sont ≤ 12 et premiers avec 12 sont : 1, 5, 7 et 11 et leur nombre est 4.
6. La fonction "de Möbius", notée μ. Cette fonction associe á tout $n \in \mathbb{N}^*$,le nombre $\mu(n) \in \{-1, 0, 1\}$, défini par :

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{si n=1} \\ 0 & \text{si n est multiple d'un carré parfait, autre 1} \\ (-1)^k & \text{si n est un produit de k nombres premiers, deux á deux distincts} \end{cases}$$

En ce qui nous concerne, nous nous intéressons uniquement aux fonctions d et σ. En fait, c'est précisément la fonction σ qui intervient dans l'étude des nombres parfaits. Nous allons d'abord déterminer des formules explicites pour $d(n)$ et $\sigma(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ en fonction de n. On a la :

Proposition 5.1 *soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en produit de nombres premiers (où k,$\alpha_1, ..., \alpha_K \in \mathbb{N}$ et $p_1, ..., p_k$ des nombres premier deux á deux distincts). Alors, on a :*

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$$

et

$$\sigma(n) \;=\; \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \times \frac{p_1^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \times ... \times \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

preuve:

- Montrons d'abord la formule concernant la fonction d. Étant donné $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} \in \mathbb{N}^*$ (avec k,$\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$ et $p_1, ..., p_k$ des nombres premiers deux á deux distincts), un entier strictement positif est un diviseur de n si et seulement si sa décomposition en produit de nombres premiers s'écrit sous la forme $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$, avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$. Le nombre $d(n)$ de tous les diviseurs de n est donc égale au nombre de k-uplets, chaque $(\beta_1, ..., \beta_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, pour tout $i \in \{1, ..., k\}$. Si l'on doit choisir un tel k-uplet, chaque $\beta_i (1 \leq i \leq k)$ posséde $(\alpha_i + 1)$ choix, ce qui fait que le nombre de tel k-uplets est égal á $\Pi_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1) = (\alpha_1 + 1)\,(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$. D'où $d(n) = (\alpha_1 + 1)\,(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$, comme il fallait le prouver.

- Montrons maintenant la formule concernant la fonction σ. Étant donné $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} \in \mathbb{N}^*$ (avec $k, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$ et $p_1, ..., p_k$ des nombres premiers deux á deux distincts), les diviseurs de n sont les entiers strictement positifs $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... P_k^{\beta_k}$, avec $\beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \beta_i \leq \; alpha_i$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sigma(n) := \sum_{d/n} d &= \sum_{0 \leq \beta_K \leq \alpha_K} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k} \\
&= \sum_{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1} p_1^{\beta_1} . \sum_{0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2} p_2^{\beta_2} ... \sum_{0 \leq \beta_k \leq \alpha_k} p_k^{\beta_k} \\
&= \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}+1}{p_2-1} ... \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1},
\end{aligned}$$

  comme il fallait le prouver. La proposition est démontrée.

■

Remarque 5.2 .

En utilisant la fonction arithmétique σ, les nombres parfaits se définissent comme étant les entiers strictement positifs n, vérifiant :

$$\sigma(x) \;=\; 2n$$

De même, un couple de nombres amicaux se définit comme étant un couple $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ *tel que :*

$$\sigma(x) = \sigma(y) = x + y.$$

5.2 Fonctions multiplicatives

Définition 5.3 *Une fonction arithmétique* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ *est dite multiplicative si pour tout* $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$ *, avec n premier avec m, on a :*

$$f(nm) = f(n)\, f(m) \qquad (1)$$

-Elle est dite complètement multiplicative si (1) *est vérifiée pour tout* $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$ *(sans la condition "n premier avec m").*

Un exemple facile : *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, la fonction arithmétique* $n \mapsto n^\alpha$ *est clairement complètement multiplicative.*

Remarque 5.4 .

- *Il est facile de voir que toute fonction multiplicative non identiquement nulle* f *vérifie* $f(1) = 1$.
- *Pour définir une fonction complètement multiplicative (non identiquement nulle), il suffit de la définir sur l'ensemble des nombres premiers et pour définir une fonction multiplicative (non identiquement nulle), il suffit de la définir sur l'ensemble des puissances des nombres premiers.*

Exemple 5.5 .

La fonction définie sur l'ensemble des puissances des nombres premiers et qui associe á toute puissance $p^\alpha (\alpha \in \mathbb{N}^*)$ *d'un nombre premier p, le nombre* $(p^\alpha - 1)$ *se prolonge de façon unique en une fonction multiplicative* $\tilde{f}$*. Ce prolongement* $\tilde{f}(1) = 1$ *et pour tout* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ *(avec k,* $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ *et* $p_1, ..., p_k$ *des nombres premiers deux á deux distincts) :*

$$\begin{aligned}\tilde{f}(n) = \tilde{f}(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots . p_k^{\alpha_k}) = \tilde{f}(p_1^{\alpha_1} \tilde{f}(p_2^{\alpha_2}) \ldots \tilde{f}(p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \ldots f(p_k^{\alpha_k}) \\ = (p_1^{\alpha_1} - 1)(p_2^{\alpha_2} - 1) \ldots (p_k^{\alpha_k} - 1).\end{aligned}$$

Nous allons voir maintenant que les fonctions qui nous intéressent dans ce papier, á savoir d et σ, sont multiplicatives. Ceci est en fait un corollaire immédiat de la proposition 5.1.

Corollaire 5.6 *Les fonctions d et σ sont multiplicatives.*

preuve: La multiplicativité des fonctions d et σ se démontrent et de la même façon en se servant de la proposition 5.1. Montrons juste la multiplicativité de d. Comme $d(1) = 1$,il suffit de montrer que l'on a $d(nm) = d(n)d(m)$ pour tout couple (n, m) d'entiers strictement plus grands que 1 et premiers entre eux. Soit (n, m) un tel couple et soient $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ (avec k,$\alpha_1...\alpha_k \in N^*$ et $p_1, ..., p_k$ des nombres premiers deux á deux distincts) la décomposition de n en produit de nombres premiers et $q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}...q_l^{\beta_l}$ (avec l, $\beta_1, ..., \beta_l \in \mathbb{N}^*$ et $q_1, ..., q_l$ des nombres premiers deux á deux distincts) la décomposition de m en produit de nombres premiers. Comme n et m sont supposés premiers entre eux alors ils n'ont pas de facteur premier commun, c'est-á-dire que l'on a $p_i \neq q_j$ pour $i \in \{1, ..., k\}$ et tout $j \in \{1, ..., l\}$.Il s'ensuit que les nombres premiers $p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_l$ sont tous deux á deux distincts. Il en résulte en vertu de la proposition 5.1 que l'on a : $j \in \{1, ..., l\}$ que l'on a :

$$\begin{aligned} d(nm) &= d(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots q_l^{\beta_l}) \\ &= (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)(\beta_1+1)(\beta_2+1)\ldots(\beta_l+1) \\ &= d(n)d(m), \end{aligned}$$

■

Remarque 5.7 .

- *Les fonction d et σ ne sont pas complètement multiplicatives, En effet, on a par exemple $d(4) \neq d(2)d(2)$ et $\sigma(4) \neq \sigma(2)\sigma(2)$*
- *On peut montrer que la fonction indicatrice φ d'Euler et la fonction μ de Möbius sont multiplicatives mais elles ne sont pas complètement multiplicatives.*

5.3 Fonction somme des diviseurs

En arithmétique, la somme des diviseurs d'un nombre entier strictement positif est l'entier obtenu en effectuant la somme de tous les diviseurs positifs de cet entier.

La fonction qui, á un entier, associe la somme de ses diviseurs est souvent notée σ.
Ainsi $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(p) = p + 1$ pour tout nombre premier p et $\sigma(1) = 1$.
Cette fonction intervient dans l'étude des nombres parfaits, amiables, déficients ou abondants, des nombres intouchables ou sublimes ou dans les suites aliquotes. Elle est aussi étudiée dans le cadre de l'hypothèse de Riemann.
C'est un exemple de fonction multiplicative.

On étudie aussi parfois la somme $S(n) = \sigma(n) - n$ des diviseurs stricts d'un entier n, c'est-á-dire de tous les diviseurs positifs de n strictement inférieurs á n.

Propriétés 5.8

- *Comme toutes les fonctions diviseur σ_a , la fonction $\sigma = \sigma_1$ est multiplicative, c'est-á-dire que, pour tous entiers m et n premiers entre eux, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$*
- *La somme des termes d'une suite géométrique permet de calculer la somme des diviseurs d'une puissance d'un nombre premier :*

$$\sigma(p^k) \ = \ \sum_{j=0}^{k} p^j \ = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

(La fonction σ n'est donc pas complètement multiplicative.)
L'utilisation des deux propriétés précédentes permet de déterminer la somme des diviseurs de n connaissant sa décomposition en facteurs premiers : si

$$n \ = \prod_{i=1}^{r} = p_i^{k_i}$$

alors

$$\sigma(n) \ = \ \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k_i - 1} - 1}{p_i - 1}$$

- *Au sens de la convolution de Dirichlet, on peut écrire $\sigma = Id * 1$. σ possède alors un inverse*
  $\sigma^{-1} = 1^{-1} * Id^{-1} = \mu * (\mu Id)$. qu'on peut calculer explicitement : $\sigma^{-1}(n)$ est nul dés que $\sigma^{-1}(n)$ admet un facteur cubique, et sinon en écrivant $n = (p_1 p_2 ... p_r)(q_1 q_2 ... q_l)^2$ où le p_i et le q_i sont des nombres premiers deux á deux distincts, on
  $\sigma^{-1}(n) = (-1)^r (p_1 + 1)(p_2 + 1)...(p_r + 1) q_1 q_2 ... q_l$.

5.4 Fonction d'Euler

En mathématiques, la fonction d'Euler est donnée par

$$\phi(q) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k).\phi(q)$$

. Elle est nommée d'après Leonhard Euler, et elle constitue un exemple type du q-analogue d'une série. C'est une forme modulaire, et elle fournit un exemple typique d'interaction entre combinatoire et analyse complexe. On peut écrire la définition de ϕ comme produit infini de façon compacte grâce au symbole de Pochhammer $\phi(q) := (q,q)_\infty$.

Propriétés 5.9 .

Le coefficient $p(k)p(k)$ du développement en série formelle de $1/\phi(q)$ est le nombre de partitions de l'entier k. Formellement,

L'identité d'Euler, aussi appelé le théorème des nombres pentagonaux, est l'identité

$$\phi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2}.$$

Dans cette somme, les nombres $n(3n-1)/2$ sont les nombres pentagonaux généralisés.

La fonction d'Euler est liée à la fonction êta de Dedekind. Pour tout nombre complexe τ de partie imaginaire positive, on définit $q = e^{2i\pi\tau}q$, et la fonction êta est :

$$\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = q^{1/24}\phi(q)$$

Les deux fonctions possèdent les symétries du groupe modulaire. La fonction d'Euler s'exprime aussi simplement á l'aide du q-symbole de Pochhammer :

$$\phi(q) = (q;q)_\infty$$

Le logarithme de la fonction d'Euler est la somme des logarithmes des facteurs du produit ; chacun peut être développé autour de q = 0, ce qui donne :

$$\ln(\phi(q)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^n}$$

qui est une série de Lambert avec coefficients $-1/n - 1/n$. Le logarithme de la fonction d'Euler

s'exprime donc par :

$$\ln(\phi(q)) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m q^m \qquad avec \qquad b_m = -\sum_{n|m} \frac{1}{n}.$$

5.5 Fonction de Möbius

En mathématiques, la fonction de Möbius désigne généralement une fonction multiplicative particulière, définie sur les entiers strictement positifs et à valeurs dans l'ensemble $\{1, 0, 1\}$. Elle intervient dans la formule d'inversion de Möbius.

Elle est utilisée dans des branches différentes des mathématiques. Vue sous un angle élémentaire, la fonction de Möbius permet certains calculs de dénombrement, en particulier pour l'étude des p-groupes ou en théorie des graphes. En arithmétique, elle est parfois définie comme l'inverse de la fonction multiplicative constante 1, pour l'opération convolution de Dirichlet. On la trouve encore pour l'étude des polynômes cyclotomiques sur le corps des nombres rationnels. Son rôle est analogue pour les corps finis et, par voie de conséquence, la fonction de Möbius intervient dans la théorie des codes correcteurs. En théorie analytique des nombres, la fonction de Möbius est plus souvent introduite á l'aide des séries de Dirichlet. Elle intervient dans certaines démonstrations liées á l'étude de l'hypothèse de Riemann sur les nombres premiers.
L'usage de cette fonction est ancien : on le trouve chez Euler en 1748 ou encore chez Gauss dans ses Disquisitiones arithmétique en 1801. c'est néanmoins M̈bius qui est le premier l'étudie systématiquement, en 1832.

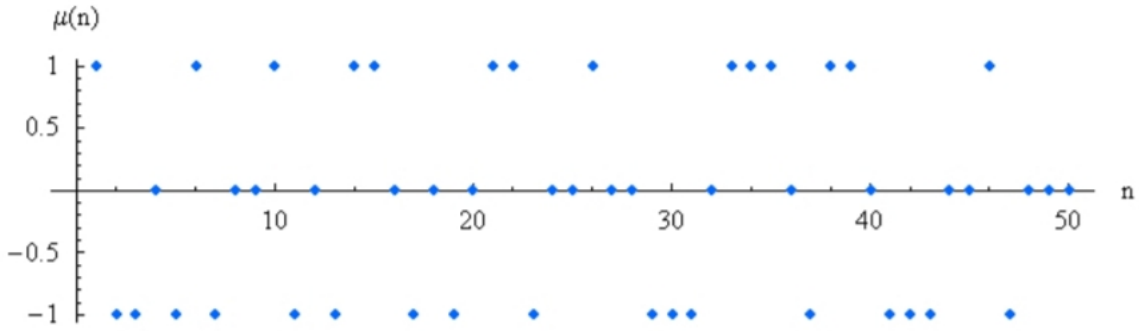
Définition 5.10 ***de fonction Möbius [20]***
La fonction de Möbius μ est définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\{-1, 0, 1\}$. L'image $\mu(n)$ d'un entier $n > 0$ vaut :

- *0 si n est divisible par un carré parfait différent de 1 ;*
- *1 si n est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts ;*
- *-1 si n est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts.*

Le tableau de ses vingt premières valeurs est donc :

n	*1*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
$\mu(n)$	*1*	*-1*	*-1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*0*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*0*	*-1*	*0*

et le graphe de ses cinquante premières valeurs est :



Conclusion

La réalisation de ce mémoire fut un peu pénible, vu qu'il faut essayer de comprendre la façon avec laquelle on pourrait interpréter un document historique. Concernant les informations sur la civilisation musulmane, nous avons bâti sur les travaux de Roshdi Rashed. Les concepts élémentaires que nous avons taquiné nous ont signifiés dans leur écho la richesse du sujet et l'attente à être dépoussiérer ;certaines attributions actuelles de résultats devraient être corrigées, et la considération du pont de la civilisation musulmane entre orient et occident devrait être revue.

Bibliographie

[1] **sv. Berggren,** "Pytagoreiska trianglar", Tidskrift for elementar matematik, fysik och kemi, 17,1934,p. 129-139.

[2] **J. P. Delahaye**, "Dans les arcanes des triplets pythagoriciens", pour la science, n^0 514, août 2020, p. $80 - 85$.

[3] **J. Dieudonné**, pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui, Hachette, 1988, 298 p.(ISBN 978-2-01-011950-7, Oclc 20000703),p.94.

[4] **B. Farhi**, Nombres parfaits, université Bejaia, page 17.

[5] **B. Farhi**. On the representation of an even perfect number as the sum of five cubes, Funct. Approx. Comment. Math, 57, Number 2 (2017), p. $277 - 278$.

[6] **P. Guillot**, cours de mathématiques L1, TheBookEdition, p.229.

[7] **S. T. Heath,** The Thirteen Books of the Éléments, Vol. 2 : Books 3-9, page 331.

[8] **S. T. Heath**, The Thirteen Books of the Éléments, Vol. 2 : Books 3-9, page 332.

[9] **S. T. Heath**, The Thirteen Books of the Éléments, Vol. 2 : Books 3-9 page 333.

[10] **S. T. Heath**, The Thirteen Books of the Éléments, Vol. 2 : Books 3-9 page 403.

[11] **S. T. Heath, euclide,** les Éléments, livre 10 , lemme1 proposition 28, page 63.

[12] **S. T. Heath**, tome 2, page 421,422.

[13] https ://fr.wikipedia. org/Plimpton_332#cite_ref_Robsson2001p174_7-0.

[14] **R. Rashed**(2015), Classical Mathematics, from al Khawarizmi to Descartes. Routledge, Taylor and Francis group, London and New York.

[15] **R. Rashed**(1984). Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'Histoire des Mathématiques Arabes. Société d'Edition les Belles Lettres Paris.

[16] **W. Sierpinski**, pythagorean triangles, Dover, $2003(1^{er}$.éd. 1962),p. 4-7.

[17] **J. Stillwell,** Elements of Number Theory, Springer, coll. "Undergraduate Texts in Mathematics", 2003,p. 112.

[18] **A. Stoll**, "Générations algébriques des triplets pythagoriciens", L'Ouvert, $n^{os}100-101$, septembre $2000, p.1$

[19] **G. Villemin** ,"Quantité de triplets", 15 mars 2020.

[20] **G. Villemin,** « Fonction de Möbius » , sur les Nombres : curiosités - théorie - usage.

Al Farisi

Kamal al-DinAbu'l-Hasan Muhammad Al-Farisi $(1267 - v.1320)$ est un physicien, mathématicien et savant musulman persan, né à Tabriz. On lui doit deux contributions majeures à la science, sur l'optique et sur la théorie des nombres. Il est l'élève du grand astronome et mathématicien Qutb al-Din al-Shirazi, lui-même élève de Nasir ad-Dinat-Tusi. Il est l'auteur du TanqihKitab al-Manazir (La révision du traité d'optique d'Ibn al-Haytham).

Il est connu pour avoir donné la première explication mathématiquement satisfaisante de l'arc-en-ciel et une explication de la nature des couleurs qui ont réformé la théorie d'Ibn al-Haytham (Alhazen). Il a également "proposé un modèle où le rayon de lumière du soleil était réfracté deux fois par une goutte d'eau, une ou plusieurs réflexions se produisant entre les deux réfractions". Il a vérifié cela par une expérimentation approfondie en utilisant une sphère transparente remplie d'eau et une chambre noire.

Il a apporté un certain nombre de contributions importantes à la théorie des nombres. Son travail le plus impressionnant en théorie des nombres porte sur les nombres amicaux. Dans Tadhkira al-ahbab fi bayan al-tahabb ("Mémorandum pour des amis sur la preuve de l'amitié") il a introduit une nouvelle approche majeure à tout un domaine de la théorie des nombres, introduisant des idées concernant la factorisation et les méthodes combinatoires. En fait, l'approche de al-Farisi est basée sur la factorisation unique d'un entier en puissances de nombres premiers. Alors que le mathématicien grec Euclide a fait le premier pas vers l'existence de la factorisation première, al-Farisi a franchi le dernier pas et a énoncé pour la première fois le théorème fondamental de l'arithmétique.

Thabit ibn Qurra

Abu al Hassan Thabit ibn Qurra, est issu de la communauté des Sabéens, qui a son centre à Harran. Issus de l'exil de l'École néoplatonicienne d'Athènes après les persécutions anti-païennes de l'empereur chrétien Justinien, ils sont des néoplatoniciens, accusés par les musulmans d'être des adorateurs des étoiles, mais ils s'en défendent en invoquant les Sabéens cités par le Coran, qui eux sont des baptistes judéo-chrétiens et à ce titre des « gens du Livre ». En tout cas ils sont proches de la culture gréco-hellénistique, il leur est commun d'en parler la langue, comme le syriaque et l'arabe. D'où leur rôle historique comme pont entre les cultures grecque et arabo-musulmane.

A Bagdad, Ibn Qurra étudie à la Maison de la sagesse et se lie d'amitié avec al-Munadjdjim, théoricien de la musique. D'après les déclarations d'Ibn al Qifti, Abu al Hassan Thabit ibn Qurra aurait écrit un traité de musique en syriaque de 500 feuilles et mentionne que ses écrits et épîtres sur la musique sont nombreux.

Mais Thabit est avant tout connu comme mathématicien et traducteur majeur de l'oeuvre mathématique et astronomique des Anciens Grecs vers l'arabe : Archimède, Euclide, Ptolémée, Apollonius ; Plusieurs des textes de ces auteurs ne nous sont plus accessibles que par ces traductions et sont arrivés par elles dans l'Europe occidentale, où elles seront la base de nombreuses traductions latines du XII^e siècle.

Cette activité se déroule dans le cadre de la communauté réunie par les frères Banou Moussa, mathématiciens et mécènes de Bagdad qui financent des missions dans l'Empire byzantin pour retrouver des manuscrits anciens et les faire traduire. Ils introduiront Thebit à la cour du calife Abbasside al-Mutadid, où il finira ses jours comme proche conseiller.

La contribution propre de Thabit est importante en théorie des nombres (nombres amicaux et nombres de Thebit), en calcul intégral (aire des secteurs de coniques) et en algèbre (moyenne géométrique).

Philosophe, Thabit ibn Qurra, s'est interrogé sur l'existence de l'infini. Il a notamment abordé cette question d'un point de vue mathématique : il montre que l'ensemble des entiers (naturels) pairs et l'ensemble des nombres impairs ont même nombre d'éléments, et que l'on passe de l'un à l'autre en ajoutant un. Il en déduit qu'un infini peut-être la moitié d'un autre infini, puisque chacun de ces deux ensembles représente la moitié de l'ensemble des entiers naturels, un infini peut ainsi être plus grand qu'un autre. Même si son raisonnement, qui s'appuie trop sur l'analogie avec les entiers, est erroné, il s'agit de la première tentative connue de calculer sur les infinis.
Sur la Lune, le cratère Thebit porte son nom.

En mathématiques, l'appellation nombre de Thebit désigne les nombres de la forme « $3 \cdot 2n - 1$ », avec « n » entier naturel.

Ibn al Haytham

Al Hasan ibn al Hasan ibn al Haytham, nommé en occident Alhazen est né vers 965 à Bassora dans l'actuel Irak où il reçut une éducation qu'il compléta cependant dans la ville de Bagdad. À l'époque, Bassora était sous le contrôle de la dynastie des Buwayhides qui régnèrent sur la Perse. C'est pourquoi il est parfois mentionné sous le nom d'Al-Bassri, bien que cette version ne soit pas acceptée par tous.

Il profita de ce loisir forcé pour écrire plusieurs livres sur des sujets variés comme l'astronomie, la médecine, les mathématiques, la méthode scientifique et l'optique. Près de 200 ouvrages ont été attribués par les biographes mais une soixantaine nous est parvenue. Peu de ces ouvrages, en effet, ont survécu jusqu'à nos jours. Quelques-uns d'entre eux, ceux sur la cosmologie et ses traités sur l'optique notamment, n'ont survécu que grâce à leur traduction latine.

Après la mort du calife Hakim, en 1021, Alhazen cessa de feindre sa folie et put sortir de sa résidence. Il en profita donc pour entreprendre quelques voyages, notamment en Al-Andalus (nom donné, à l'époque, à l'Espagne musulmane).

Il meurt au Caire en Égypte au sein du califat fa timide vers 1040.

Dans l'introduction de ses ouvrages (Traité d'optique et Doutes sur Ptolémée) il expose ce qui représente pour lui la démarche scientifique faite d'expérimentations et de doutes.

Les travaux d'Alhazen sont multiples, ils touchent l'optique, mais également les mathématiques et l'astronomie. Savant ayant assis sa réputation dans le monde arabe médiéval, il est également connu en Europe à travers les traductions en latin, hébreu et italien de ses travaux en optique et astronomie.

Ibn Tahir al-Baghdadi

Naquit, comme son nom l'indique (Al-Baghdadi) à Badgad, en Irak, vers l'année 980, au sein d'une famille fortunée. De son nom complet, nous pouvons déduire certains éléments biographiques, outre qu'il était Bagdadi : l'appellation "Al-Tamimi " signifie vraisemblablement son rattachement (réel ou pour des raisons pratiques) à la tribu de Banu-Tamim, originaire d'Arabie Saoudite, et l'appellation "al-Shafi'i" qu'il appartient à l'école de jurisprudence musulmane dite "Shâfi'ite".

Avec son père, il quitta Badgad pour Nishapour, dans le Nord-Est de l'Iran. Là, il mena une vie partagée entre l'enseignement et la recherche. Mais l'instabilité de la région et les révoltes qui en résultaient l'amenèrent à s'installer à Asfarayin, toujours en Iran. Tout comme à Nishapour, il continua à dispenser son enseignement et de manière gratuite, grâce à sa richesse personnelle le mettant à l'abri du besoin. Il mourut en 1037.

Ses oeuvres traitent essentiellement de questions religieuses, puisque certains de ses cours avaient lieu dans des mosquées, mais c'est surtout pour ses travaux mathématiques que Ibn Tahir passe à la postérité. Ceux-ci sont concentrés au sein de deux livres, mais c'est principalement le traité intitulé al-Takmila fi-l-Hisab qui a retenu l'attention en raison des avancées qu'il inclut.

Ibn Tahir définit dans son traité les nombres abondants, les nombres déficients, les nombres parfaits et les nombres équivalents (il semble être le premier à s'intéresser à ces derniers). Il innove en avançant que le premier nombre abondant impair (et primitif) est le 945, résultat attribué au mathématicien français du $XVII^e$ siècle, Claude-Gaspard Bachet de Méziriac. Il réfute également certaines erreurs de Nicomaque de Gerasa, et qui furent admises comme vérités par les mathématiciens européens jusqu'au XVI^e siècle.

Ibn al Banna al Murrakuchi

Fils d'architecte, né à Marrakech en 12562, il acquit les compétences basiques de son époque en mathématiques et en géométrie et traduisit les Éléments d'Euclide en arabe. Il enseigna les mathématiques à l'université de Fès1. Il écrivit de plus entre 51 et 74 traités, traitant de sujets aussi variés que l'algèbre, l'astronomie, la linguistique, et la logique. Il définit le premier une fraction comme étant le rapport de deux nombres, et est le premier à utiliser le mot almanach pour désigner une table astronomique et météorologique.

Il est connu entre autres pour deux de ses travaux :
Talkhisaâmal al-hisab (Sommaire des opérations arithmétiques), qui aborde les fractions, les sommes de carrés et de cubes, ...

Raf al-Hijab (Lever du voile sur les opérations du calcul), qui traite du calcul des racines carrées, et de la théorie des fractions continues.
Un autre, Tanbih al-Abab recouvre des sujets juridiques de la vie de tous les jours :
Calculs du niveau dans un canal d'irrigation.

Explications mathématiques des lois islamiques sur l'héritage.
Calculs des taxes l'égales à la suite d'un retard de paiements.
Depuis 1976, un cratère d'impact sur la face visible de la Lune porte son nom : le cratère Al-Marrakushi.

Euler

Leonhard Euler,né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 (18 septembre 1783 dans le calendrier grégorien) à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie ou en géométrie du triangle.

Euler est considéré comme un éminent mathématicien du $XVIII^e$ siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps. Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous ». Il était un fervent chrétien, croyant en l'inerrance biblique, et s'opposa avec force aux athées éminents de son temps.

Fermat

Pierre de Fermat,né dans la première décennie du $XVII^e$ siècle, à Beaumont-de-Lomagne (département actuel de Tarn-et-Garonne), près de Montauban, et mort le 12 janvier 1665 à Castres (département actuel du Tarn), est un magistrat, Polymathe et surtout mathématicien français, surnommé « le prince des amateurs ». Il est aussi poète, habile latiniste et helléniste, et s'est intéressé aux sciences et en particulier à la physique ; on lui doit notamment le principe de Fermat en optique. Il est particulièrement connu pour avoir énoncé le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994.