RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARES DU MÉDÉE

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



Cette mémoire intitulée :

# Étude numérique et analytique de la convection naturelle dans un milieu poreux saturé par non newtonien nano-fluide

EST PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE MASTERT EN GÉNIE MÉCANIQUE

Option : Énergétique

**REALISE PAR**

KHAIR Hamza

TADJINE Khelladi

**PROPOSE ET DIRIGER PAR**

Dr. KHIR Saleh

Dr. REBHI Redha

**ANNEE UNIVERSITAIRE**
2024/2025

# REMERCIEMENTS

بسم الله الرحمان الرحيم، والحمد لله على إحسانه والشكر له على توفيقه وامتنانه، الصلاة والسلام على رسولنا الكريم خاتم الأنبياء والمرسلين محمد صلى الله عليه وسلم.

Nous remercions vivement les professeurs **KHIR SALEH** et **REBHI RIDHA** pour avoir proposé le sujet ainsi que pour leur encadrement. Nous leur sommes reconnaissants pour leurs remarques, leurs conseils et leurs orientations.

نسأل الله أن يرزقهما من واسع فضله ويطرح البركة في صحتهم وذريتهم.

Nous remercions le professeur **AZIZOU MOHAMED** d'avoir accepté la présidence du jury, ainsi que le professeur **MEKHTICHE HAMID** pour son rôle d'examinateur. Nous lui sommes reconnaissants de nous avoir signalé certaines erreurs et lacunes dans la préparation du mémoire.

Nous n'oublions pas les professeurs de la Faculté de Génie Mécanique, que nous considérons comme les meilleurs enseignants de l'université.

# DÉDICACE

Je dédie ce travail, ainsi que toutes les réussites de la vie, à mes parents, car ils sont la cause de tout. Ensuite, à mes frères et sœurs, qui sont mon véritable soutien, ainsi qu'à mes amis et à tous ceux qui nous ont soutenus par une parole bienveillante.

-KHAIR Hamza-

Je dédie ce travail à ma mère et à mon défunt père, pour l'amour inébranlable, le soutien moral et les sacrifices qu'ils m'ont offerts tout au long de mon parcours. À mes frères et sœurs, et en particulier à ma petite sœur Youssra, pour leur soutien rassurant, leurs encouragements constants et leur présence dans les bons comme dans les mauvais moments. Enfin, à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'accomplissement de ce travail. Je prie Dieu de nous guider tous sur le chemin de la vérité et du bien dans cette vie.

-TADJINE Khelladi-

**ABSTRACT**

This thesis presents a numerical and analytical study of natural convection within a porous medium saturated with a non-Newtonian nano fluid. The Darcy model is used to represent the flow behavior in the medium, while the power-law model describes the apparent viscosity of the fluid. The setup assumes that the longer side of the cavity is exposed to convective heat flow, while the other walls are considered impermeable and thermally insulated. The problem is governed by a set of strongly coupled, nonlinear differential equations referred to as the governing equations including the mass conservation (continuity) equation, the momentum equation, and the energy equation. The main dimensionless parameters influencing the system are the Rayleigh number ($R_T$), the power-law index ($n$), the inclination angle ($\Phi$), and the nanoparticle volume fraction ($\phi$). For shallow cavities, an analytical solution was derived using the parallel flow approximation. The findings indicate that both the inclination angle ($\Phi$) and the power-law index ($n$) significantly affect the flow intensity ($\Psi$) and the heat transfer rate ($Nu$) inside the cavity. The results obtained from both the analytical and numerical methods show good agreement.

**Keywords:** Natural convection, non-Newtonian fluid, porous cavity, Nano-fluid.

**RÉSUMÉ**

Ce mémoire présente une étude numérique et analytique de la convection naturelle dans un milieu poreux saturé d'un nano-fluide non newtonien. Un modèle de Darcy est utilisé pour modéliser le comportement du milieu de travail et le modèle de loi de puissance utilisé pour modéliser la viscosité apparente. L'énoncé donné indique que le côté long de la cavité est soumis à des débits convectifs, tandis que les autres parois sont imperméables et thermiquement isolées. Ce problème est caractérisé par un ensemble d'équations différentielles non linéaires étroitement couplées, appelées équations gouvernantes, qui comprennent l'équation de conservation de la masse (également appelée équation de continuité), l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie. Les paramètres pertinents régissant le problème étudié sont le nombre de Rayleigh ($R_T$), l'indice de loi de puissance ($n$), l'angle d'inclinaison ($\Phi$), et la fraction volumique du nano-fluide ($\phi$). Une solution analytique pour les cavités peu profondes a été obtenue en utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle. En résolvant l'ensemble des équations, il a été démontré que la pente de l'angle d'inclinaison ($\Phi$), et l'indice de puissance ($n$), ont une forte influence sur l'intensité de l'écoulement ($\Psi$), et le taux de transfert de chaleur ($Nu$), à l'intérieur de la cavité. Les résultats obtenus par les deux méthodes démontrent une bonne concordance sur divers paramètres de contrôle.

**Mots clés :** convection naturelle, fluide non newtonien, cavité poreuse, nano-fluide.

**ملخص**

تقدم هذه المذكرة دراسة عددية وتحليلية للحمل الحراري الطبيعي في وسط مسامي مشبع بسائل نانوي غير نيوتوني. تم استخدام نموذج دارسي لنمذجة سلوك وسط العمل، كما استُخدم نموذج قانون القدرة لنمذجة اللزوجة الظاهر. يشير البيان المعطى إلى أن الجانب الطويل من التجويف يخضع لمعدلات تدفق الحمل الحراري، في حين أن الجدران الأخرى غير منفذة ومعزولة حرارياً. تتميز هذه المشكلة بمجموعة من المعادلات التفاضلية غير الخطية المترابطة بإحكام، والتي تسمى المعادلات الحاكمة، والتي تشمل معادلة الحفاظ على الكتلة (المعروفة باسم معادلة الاستمرارية)، ومعادلة الزخم، ومعادلة الطاقة. المعلمات ذات الصلة التي تحكم المشكلة قيد البحث هي رقم رايلي ($R_T$)، ومؤشر قانون الطاقة ($n$)، وزاوية الميل ($\Phi$)، والكسر الحجمي للسائل النانوي($\phi$). تم التوصل إلى حل تحليلي للحاويات الضحلة باستخدام تقريب التدفق المتوازي وصيغة معدلة من معادلة دارسي. بحل مجموعة المعادلات الحاكمة كاملةً، تبيّن أن لكلٍّ من ميل الطبقة ($\Phi$) ومؤشر قانون الأس $n$ تأثيرًا قويًا على شدة التدفق ($\Psi$) ومعدل انتقال الحرارة ($Nu$) داخل الحاوية. تُظهر النتائج المُحصل عليها من كلتا الطريقتين توافقًا جيدًا.

**الكلمات المفتاحية:** حمل طبيعي، سائل غير نيوتوني، تجويف مسامي، سائل نانوي.

**TABLE DES MATIÈRES**

**ABSTRACT …….....** i
**RÉSUMÉ ……....** ii
**ملخص…….....** iii
**TABLE DES MATIÈRES……..** iv
**LISTE DES FIGURES ……..** vii
**LISTE DES TABLEAUX……...** viii
**NOMENCLATURE ……...** ix
**SYMBOLES GRECS ……** ix
**INTRODUCTION GÉNÉRALE……...** 1
**Chapitre I : Généralités Et Recherche Bibliographiques……** 4
**I .1. Généralités sur les fluides non-newtoniens ……** 5
**1. Définition ……....** 5
**2. Classification et les types des fluides non-newtoniens ……** 5
**2.1. Fluides non-newtoniens indépendants du temps ……..** 5
**2.2. Fluides non-newtoniens dépendants du temps ……** 7
**2.3. Fluides non-newtoniens viscoélastique ……..** 7
**3. Le modèle d'Oswald - Weale (Power-Law model) ……...** 8
**I.2. Généralités sur les nano-fluides ……** 10
**1. Définition ……..** 10
**2. Nanoparticules et les fluides porteurs ……...** 10
**2.1. Types de nanoparticules ……** 11
**3. Fabrication et préparation des nano-fluides ……** 11
**4. Les propriétés thermo physiques des nano-fluides ……..** 12
**4.1. La fraction volumique ($\phi$) ……..** 12
**4.2. La masse volumique ($\rho$) ……....** 12
**4.3. La conductivité thermique ($k$) ……...** 13
**4.4. La chaleur spécifique ($Cp$) ……** 14
**4.5. La viscosité dynamique ($\mu$) ……** 14
**I.3. Généralités sur les milieux poreux ……....** 15
**1. Définition ……..** 15
**2. Classification des milieux poreux ……..** 15
**3. Caractéristiques géométriques des milieux poreux …….....** 15

**3.1. Volume Élémentaire Représentatif (VER) …….....** 15
**3.2. La porosité ($\varepsilon$) ……..** 16
**3.3. La tortuosité ($\tau$) ……...** 16
**3.4. Perméabilité ($K$) ……...** 17
**3.5. La surface spécifique ($A_s$) ……...** 17
**4. Les modèles d'écoulement dans les milieux poreux ……** 17
**4.1. Modèle de Darcy (1856) ……..** 17
**4.2. Modèle de Darcy - Forchheimer (1901) ……** 18
**4.3. Modèle de Brinkman (1947) ……...** 18
**4.4. Modèle général ou modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer ……...** 18
**5. Régimes d'écoulement dans les milieux poreux ……...** 19
**I.4. Etat de l'art ……** 19
**Chapitre II : Modèle Physique Et Formulation Mathématique ……** 23
**II.1. Description du problème ……..** 24
**II.2. Hypothèses simplifiées ……..** 24
**II.3. Formulation mathématique ……** 25
**Chapitre III : Solution Analytique ……...** 30
**Chapitre IV : Solution Numérique ……...** 33
**IV.1. Discrétisation des conditions aux limites thermiques ……...** 35
**IV.2. Discrétisation de l'équation d'énergie ……** 35
**Schéma implicite en x et explicite en y ……** 35
**Schéma implicite en y et explicite en x ……** 36
**IV.3. Discrétisation de la vitesse ……..** 37
**IV.4. Discrétisation des conditions aux limites de vitesse ……..** 37
**IV.5. Discrétisation de la viscosité ……...** 38
**IV.6. Discrétisation de l'équation de mouvement ……...** 38
**IV.7. Algorithme de calcul ……** 39
**IV.8. Organigramme de calcul ……** 40
**IV.9. Choix de maille ……** 41
**Chapitre V : Résultats Et Discussion ……...** 42
**V.1. Effet des paramètres gouvernants sur les structures d'écoulement ……** 43
**V.1.1. Effet de l'indice de loi de puissance ($n$) ……..** 43
**V.1.2. Effet de Fraction volumique du nano-fluide ($\phi$) ……....** 44

**V.1.3. Effet d'Angle d'inclinaison (Φ) …….....** 45

**V.2. Effet des paramètres gouvernants sur les profils fonction de courant, température et viscosité …….** 46

**V.2.1. Effet de l'indice de loi de puissance ($n$) ……..** 46

**V.2.2. Effet de Fraction volumique du nano-fluide ($\phi$) ……** 47

**V.2.3. Effet d'Angle d'inclinaison (Φ) ……...** 48

**V.3. Effet des paramètres gouvernants et le nombre de Rayleigh ($R_T$) sur l'apparition de la convection ……..** 49

**V.3.1. Effet de l'indice de loi de puissance ($n$) et le nombre de Rayleigh ($R_T$) sur l'apparition de la convection ……...** 49

**V.3.2. Effet de de Fraction volumique ($\phi$) et le nombre de Rayleigh ($R_T$) sur l'apparition de la convection ……...** 50

**V.3.3. Effet de Fraction volumique ($\phi$) et l'indice de loi de puissance ($n$) sur l'apparition de la convection ……...** 51

**V.3.4. Effet d'Angle d'inclinaison (Φ) et l'indice de loi de puissance ($n$) sur l'apparition de la convection ……...** 51

**CONCLUSION GENERALE ……** 53

**REFERENCE ……** 55

## LISTE DES FIGURES

**Figure 1.1 :** Variation du taux de cisaillement. 5

**Figure 1.2 :** schéma représentant la Classification et les types des fluides non-newtoniens. 8

**Figure 1.3** : Nanoparticules sphériques ; Nanotubes. 11

**Figure 1.4** : Production de nanoparticules par évaporation de fil d'impulsion. 12

**Figure 1.5** : Représentation schématique du V.E.R. 15

**Figure 1.6** : la porosité effective ou utile. 16

**Figure 1.7** : Définition schématique de la tortuosité. 17

**Figure 2.1 :** Représentation schématique du modèle physique. 24

**Figure 4.1 :** Maillage du domaine de calcul dans ($i$, $j$). 34

**Figure 5.1 :** Présentation respective des lignes de courant (Ψ), des isothermes ($T$) et la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) pour $R_T$ = 100, $\phi$ = 0.05 et Φ = 90° et différentes valeurs de $n$. 43

**Figure 5.2 :** Présentation respective les contours des lignes de courant (Ψ), les isothermes ($T$) et de la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) pour $R_T$ = 100, $n$ = 1.2, Φ = 90° et différentes valeurs de $\phi$. 44

**Figure 5.3 :** Présentation respective des lignes de flux (Ψ), la température (T) et la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) pour $R_T$ = 100, $n$ = 0.8, ϕ = 0.05 et différentes valeurs de Φ. 45

**Figure 5.4 :** Effet de l'indice de puissance ($n$) avec Φ = 90°, $R_T$ = 100 et $\phi$ = 0.05, sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ), (b) la température (T), (c) la viscosité apparente ($\mu_{nf}$). 47

**Figure 5.5 :** Effet de fraction volumique ($\phi$) avec Φ = 90°, $R_T$ = 100 et Φ = 90°, sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ), (b) la température (T), (c) la viscosité apparente ($\mu_{nf}$). 48

**Figure 5.6 :** Effet de l'angle d'inclinaison (Φ) avec $n$ = 0.8, $R_T$ = 100 et $\phi$ = 0.05, sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ), (b) la température (T), (c) la viscosité apparente ($\mu_{nf}$). 49

**Figure 5.7 :** Effets du nombre de Rayleigh ($R_T$) et de l'indice de puissance ($n$) sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ), et (b) les nombres de Nusselt ($Nu$). 50

**Figure 5.8 :** Effets du nombre de Rayleigh ($R_T$) et de fraction volumique ($\phi$) sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ) et (b) les nombres de Nusselt ($Nu$). 50

**Figure 5.9 :** Effets du nombre de l'indice de loi de puissance ($n$) et de fraction volumique ($\phi$) sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ) et (b) les nombres de Nusselt ($Nu$). 51

**Figure 5.10 :** Effet dû $n$, et de Φ, sur : (a) la fonction de courant au centre de la cavité, (b) le nombre de Nusselt $Nu$, et (c) le gradient de température $C_T$ pour $R_T$ = 100 et $\phi$ = 0.05. 52

## LISTE DES TABLEAUX

**Tableau 2.1** : Propriétés thermo-physiques de l'eau et des nanotubes de carbone à paroi simple (SWCNT). 27

**Tableau 4.1 :** tests de convergence effectués en utilisant les paramètres spécifiés suivants : $R_T$ = 100, $\phi$ = 0,05, Φ = 90° et plusieurs valeurs de l'indice de loi de puissance ($n$). 41

## NOMENCLATURE

| | |
|---|---|
| $C_T$ | le gradient de température sans dimension dans la direction *x*, |
| F | coefficient de forchheimer, |
| $g$ | accélération gravitationnelle, $m/s^2$ |
| $h$ | indice de consistance, $Pa\ s^n$ |
| $k$ | conductivité thermique, $W/(m\ K)$ |
| $K$ | perméabilité du milieu poreux, $m^2$ |
| $L'$ | longueur de la cavité, $m$ |
| $n$ | indice de la loi de puissance, |
| $Nu$ | nombre de Nusselt, |
| $p'$ | Pression, |
| $q'$ | flux de chaleur constant par unité de surface, $W/m^2$ |
| $R_T$ | nombre de Rayleigh, |
| $T$ | température adimensionnelle, |
| $\Delta T'$ | différence de température caractéristique |
| $\overrightarrow{V'}$ | vitesse superficielle, |
| $u$ | la vitesse adimensionnelle dans la direction *x*, |
| $v$ | la vitesse adimensionnelle Dans la direction *y*, |
| $x, y$ | coordonnées cartésiennes |

## SYMBOLES GRECS

| | |
|---|---|
| $\varepsilon$ | porosité du milieu poreux, |
| $\mu$ | viscosité apparente, |
| $\mu_{effe}$ | la viscosité apparente effective, |
| $\tau$ | contrainte de cisaillement, |
| $\rho$ | densité du fluide, $kg/m^3$ |
| Φ | angle d'inclinaison de la cavité |
| $\phi$ | fraction volumique de nano-fluides, |
| Ψ | fonction de courant adimensionnelle |

# Introduction Générale

# INTRODUCTION GENERALE

L'étude numérique de la convection naturelle dans les milieux poreux saturés par des nano-fluides non-newtoniens constitue un domaine de recherche interdisciplinaire en pleine expansion. Ce sujet mobilise des connaissances avancées en transfert thermique, en mécanique des fluides complexes, et en ingénierie des matériaux à l'échelle nanométrique. L'introduction de nanoparticules dans les fluides permet d'améliorer significativement leurs propriétés thermo physiques, telles que la conductivité thermique et la capacité calorifique, ce qui rend les nano-fluides particulièrement attractifs pour les systèmes de gestion thermique avancés [1]. Par ailleurs, les fluides non-newtoniens présentent un comportement rhéologique non linéaire qui modifie considérablement les structures d'écoulement dans les milieux poreux, influençant ainsi les mécanismes de transfert de chaleur [2].

La convection naturelle, quant à elle, résulte des différences de température au sein du fluide, générant des mouvements spontanés sans intervention mécanique externe. Dans les milieux poreux, ce phénomène est encore plus complexe en raison des interactions entre les gradients thermiques, les propriétés du fluide, et la structure géométrique du matériau poreux. La combinaison de ces effets nano-fluides, comportement non-newtonien, et porosité rend l'analyse numérique indispensable pour mieux comprendre les mécanismes sous-jacents et optimiser les performances thermiques de nombreux systèmes, tels que les échangeurs de chaleur, les dispositifs électroniques ou les applications biomédicales [3-4]. Plusieurs études ont mis en évidence la richesse des dynamiques impliquées, notamment en présence de champs magnétiques ou d'inclinaisons géométriques [5].

La structure du message se compose de cinq chapitres. Le premier chapitre vise à introduire les définitions et concepts de base liés à la rhéologie et aux propriétés des fluides non newtoniens, ainsi que les postulats sur les nano-fluides, en plus d'un aperçu des milieux poreux, accompagné d'une explication simple des différents modèles d'écoulement utilisés dans les milieux poreux. De plus, à la fin de ce chapitre, un résumé bibliographique des contributions scientifiques liées aux travaux analytiques, numériques et expérimentaux sur la convection naturelle des fluides non newtoniens en milieux poreux est présenté. Le deuxième chapitre de la thèse est consacré à la définition de la géométrie étudiée et à la présentation de la formulation mathématique du problème. Cela comprend les équations fondamentales régissant le système et ses conditions limites associées. Au chapitre 3, nous avons développé une solution analytique basée sur le concept d'écoulement parallèle pour une couche poreuse peu profonde. Dans ce scénario, les

équations régissant le problème sont réduites à des équations différentielles ordinaires solubles analytiquement. Au chapitre 4, nous avons introduit les méthodes de résolution numérique et choisi la méthode des différences finies pour partitionner les équations régissant notre modèle. À la fin de ce chapitre, nous avons présenté l'algorithme de résolution. Le chapitre 5 se concentre sur les différents résultats obtenus dans ce travail et les discute. Enfin, nous présentons les principaux résultats ainsi qu'une conclusion générale.

# Chapitre I
# Généralités Et Recherche Bibliographiques

## I.1. Généralités sur les fluides non-newtoniens :

### 1. Définition :

Lorsque nous travaillons avec des fluides, nous constatons que leur viscosité n'est pas constante à une certaine température et pression, mais dépend plutôt du temps et du cisaillement. Nous appelons ces fluides non-newtoniens [6].

En d'autres termes, tous les fluides qui ne suivent pas la relation proportionnelle entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement sont des fluides non-newtoniens [7].

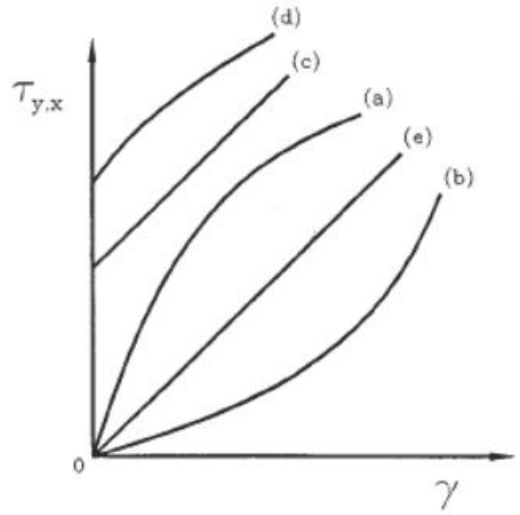



**Figure 1.1 :** Variation du taux de cisaillement [8].

Courbe (a) comportement pseudo-plastique, courbe (b) comportement dilatant, courbe (c) fluide de Bingham, courbe (d) fluide d'Herschel-Bulkley, courbe (e) fluide newtonien [8].

### 2. Classification et les types des fluides non-newtoniens :

Ces types de fluides peuvent être classés en trois catégories générales : les fluides visqueux indépendants du temps, les fluides visqueux dépendants du temps et les fluides viscoélastiques.

#### 2.1. Fluides non-newtoniens indépendants du temps :

Cette catégorie est à son tour divisée en deux catégories générales comme suit :

- Les fluides à contraintes critiques.
- Les fluides sans contraintes critiques.

### 2.1.1. Les fluides à contraintes critiques :

#### 2.1.1.1. Les fluides de Herschel-Bulkley :

Est un modèle de fluide non newtonien généralisé, dans lequel la contrainte est liée à la déformation subie par le fluide d'une manière non linéaire et complexe (courbe (d) figure I.1). Il est défini par la loi [9] :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + k\,\dot{\gamma}^n \qquad \text{Pour} \qquad \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 \qquad \text{Pour} \qquad \tau < \tau_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\tau_0$ : La contrainte seuil d'écoulement.

$\tau$ : La contrainte de cisaillement.

$k$ : La consistance du fluide.

$\dot{\gamma}$ : La vitesse de cisaillement.

$n$ : L'indice d'écoulement.

Si $n > 1$ le fluide dilatant et Si $n < 1$ le fluide est pesudoplastique.

#### 2.1.1.2. Les fluides de Bingham :

C'est un fluide qui réagit comme un solide sous une certaine pression appelée pression seuil. Sous cette pression, le cisaillement devient impossible (il ne se déforme pas et ne réagit pas), mais après avoir dépassé cette pression seuil, il se comportera comme un fluide et s'écoulera. La courbe d'écoulement est une ligne droite (courbe (c) figure I.1), Le modèle de fluide de Bingham est donné par la relation suivante [10] :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} \qquad \text{Pour} \qquad \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 \qquad \text{Pour} \qquad \tau < \tau_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Où :

$\mu_p$ : Viscosité plastique de Bingham.

#### 2.1.1.3. Les fluides de type Casson :

Ce modèle est largement utilisé lorsqu'il s'agit de fluides biologiques ou de produits alimentaires. L'équation qui régit le comportement d'un fluide de casson est [11] :

$$\tau^{1/2} = \tau + (\beta.\dot{\gamma})^{1/2} \qquad \text{Pour} \qquad \tau \geq \tau_0$$
$$\dot{\gamma} = 0 \qquad \text{Pour} \qquad \tau < \tau_0 \tag{1.3}$$

$\beta$ : Constant de viscosité plastique.

### 2.1.2. Fluides sans contraintes critiques :

#### 2.1.2.1. Fluides Rhéo-fluidifiants ou pseudo-plastiques :

Il existe certains fluides non-newtoniens dont la viscosité diminue lorsqu'ils sont soumis à une contrainte. Nous appelons ces types de fluides des fluides Rhéo-fluidifiants (ketchup) [12]. (Courbe (a) figure I.1)

Le modèle mathématique le plus couramment utilisé pour représenter ces fluides est le modèle ou loi de puissance (Power-Law model) [13] :

$$\tau = m\dot{\gamma}^n \qquad \text{Avec} \qquad n < 1 \tag{1.4}$$

*m* : indice de consistance.

*n* : indice de comportement.

#### 2.1.2.2. Fluides Rhéo-épaississants ou dilatants :

D'autres fluides non newtoniens augmentent leur viscosité lorsqu'une force leur est appliquée. Nous appelons ces types de fluides des fluides Rhéo-épaississants car ils s'épaississent lorsqu'ils sont soumis à la pression (un mélange d'eau et de semoule de maïs). Ce liquide suit également une loi de puissance mais avec $n > 1$ [13]. (Courbe (b) figure I.1)

$$\tau = m\dot{\gamma}^n \qquad \text{Avec} \qquad n > 1 \tag{1.5}$$

### 2.2. Fluides non-newtoniens dépendants du temps :

### 2.2.1. Fluide thixotropes :

C'est un fluide dont la structure se désorganise progressivement après un certain temps sous l'influence de la contrainte de cisaillement et sa viscosité diminue. Cet effet peut être inversé et le fluide retrouve sa viscosité lorsque le cisaillement s'arrête [12].

### 2.2.2. Les fluides anti-thixotropes (Rhéopexie) :

Sont des fluides qui deviennent de plus en plus solides au fur et à mesure qu'on leur applique une contrainte de cisaillement. Ils reviennent généralement à leur état initial (moins visqueux) après un temps variable lorsque la contrainte de cisaillement n'est plus présente [14].

### 2.3. Fluides non-newtoniens viscoélastique :

Un autre comportement non newtonien dépendant du temps est la viscoélasticité. Les matériaux dont les propriétés se situent entre celles des solides élastiques et celles des fluides visqueux sont classés comme « fluides viscoélastiques ». Parmi les fluides qui présentent des comportements viscoélastiques, on trouve [10] :

- Pâtes silicones.
- Solutions concentrées de certains polymères.
- Pâte à pain.
- Sable mouillé.

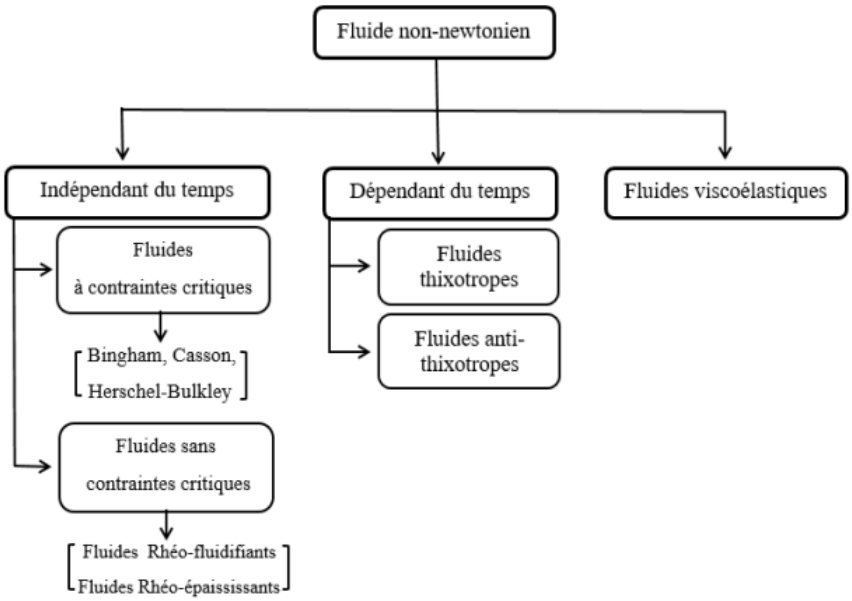



**Figure 1.2 :** schéma représentant la Classification et les types des fluides non-newtoniens [15].

## 3. Le modèle d'Oswald - Weale (Power-Law model) :

Les scientifiques étudient, analysent et classent le comportement des fluides non newtoniens depuis des décennies et ont développé de nombreux modèles analytiques pour faciliter leur analyse. Les résultats de ces modèles mathématiques peuvent être utilisés pour interpoler des données, classer et catégoriser des fluides, et même aider à effectuer des calculs pour simuler la dynamique des fluides. Un modèle simple utilisé pour décrire les fluides non newtoniens est le modèle de loi de puissance [16].

La relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement pour un fluide à faible cisaillement peut souvent être approximée par une ligne droite sur une plage limitée de taux de cisaillement (ou de contrainte). Une expression de la forme suivante est applicable [17]:

$$\tau = k\,(\dot{\gamma})^{n} \tag{1.6}$$

Donc la viscosité apparente pour le fluide dit de puissance (ou Ostwald de Waele) est donc donnée par :

$$\mu = k\,(\dot{\gamma})^{n-1} \tag{1.7}$$

Où :

$\mu$ : La viscosité apparente.

$k$ : L'indice de la consistance.

$\dot{\gamma}$ : Le taux de déformation par cisaillement.

$n$ : L'indice de comportement de l'écoulement.

Les classes changent avec l'index n comme suit :

- Pour les fluides pseudo-plastiques : 0 < n < 1.
- Pour les fluides newtoniens : n = 1.
- Pour les fluides dilatants : n > 1.

En milieu poreux, en utilisant la loi de comportement de type Ostwald, Pascal a proposé une expression empirique de la viscosité apparente fluide $\mu$, à savoir :

$$\mu = \hat{\varepsilon}\left(u'^{2}+v'^{2}+w'^{2}\right)^{(n-1)/2} \tag{1.8}$$

Où $u'$, $v'$ et $w'$ sont, respectivement, les composantes de la vitesse selon $x$, $y$ et $z$. L'expression du coefficient $\hat{\varepsilon}$est donnée par la relation :

$$\hat{\varepsilon} = \left(2\mu / 8^{\frac{(n+1)}{2}}\right)\left(\left(K\varepsilon\right)^{\frac{(n-1)}{2}}\right)\left(n / \left(1+3n\right)^{n}\right) \tag{1.9}$$

Le paramètre $\hat{\varepsilon}$dépend du comportement rhéologique, de la viscosité dynamique $\mu$, de la porosité $\varepsilon$ et de la perméabilité du milieu poreux K [18].

## I.2. Généralités sur les nano-fluides :

### 1. Définition :

Les nano-fluides sont dispersions de particules de taille nanométrique dont le diamètre est typiquement inférieur à 100 nm, appelées nanoparticules, dans un fluide de base afin d'en améliorer certaines propriétés [19].

### 2. Nanoparticules et les fluides porteurs :

Une nanoparticule est un assemblage de quelques centaines à quelques milliers d'atomes, conduisant à un objet dont au moins l'une des dimensions est de taille nanométrique (1 à 100 nm). Les nanoparticules se situent à la frontière entre l'échelle microscopique et l'échelle atomique ou moléculaire [20].

Les nanoparticules les plus utilisées pour obtenir des nano-fluides sont :

Les nanoparticules métalliques :

- L'aluminium (Al).
- Le cuivre (Cu).
- L'or (Au).
- L'argent (Ar).

Les nanoparticules des oxydes métalliques :

- L'oxyde de l'aluminium (Al2O3).
- L'oxyde de cuivre (CuO).
- L'oxyde de silicium (SiO2).
- L'oxyde de titan (TiO2).

Les nanoparticules non-métalliques :

- Les nanotubes de carbone (CNT).
- Le diamant (C).

Les fluides de base les plus utilisées :

- L'éthylène glycol, EG.
- Les huiles.
- Le toluène.
- Les fluides de réfrigération (R12.R22…) [21].

### 2.1. Types de nanoparticules :

D'une manière générale, les nanoparticules peuvent être classées selon leur forme en deux grandes catégories :

- Les nanoparticules sphériques pour lesquelles plusieurs types de matériaux peuvent être utilisés pour leur fabrication. Ces nanoparticules sphériques peuvent ainsi être à base de métaux (cuivre Cu, fer Fe, or Au, argent Ag …) ou d'oxydes cuivre (oxyde d'aluminium Al2O3, oxyde de cuivre CuO, oxyde de titane TiO2…).
- Les nanotubes (les nanotubes de carbone NTC, les nanotubes de titane TiO2, nanotube de silicium…) [22].

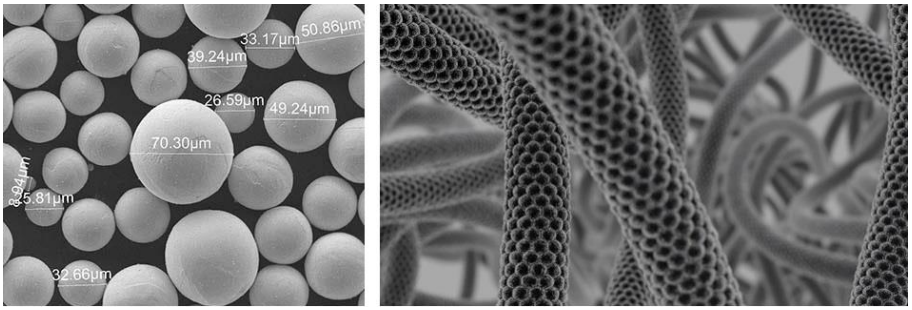



**Figure 1.3** : Nanoparticules sphériques ; Nanotubes [23].

### 3. Fabrication et préparation des nano-fluides :

Les nano-fluides sont généralement préparés par une méthode en une ou deux étapes. La méthode en une seule étape convient à la production à petite échelle, tandis que la méthode en deux étapes est bon marché pour la production de masse.

La méthode en une seule étape :

PWE (évaporation de fil d'impulsion) est la méthode la plus utilisé de produire des nano-fluides. L'appareil se compose d'un banc de condensateurs, d'une alimentation courant continu haute tension, d'une chambre de condensation et d'un interrupteur d'écart haute tension. Le procédé consiste à diriger l'impulsion de haute tension (300V) à travers un fil mince et à la suite du chauffage de non-équilibre dans les microsecondes le fil s'évapore dans le plasma. Le plasma est ensuite mis en contact avec du gaz inerte Ar ou N2 en condensant le plasma en poudre de nano taille. Le nano-fluide avec une concentration de volume donnée est ensuite versé dans une bouteille explosive contenue dans l'instrument PWE et ensuite mélangé avec la poudre de nano taille ci-dessus pour obtenir un nano-fluide

Avec l'augmentation de la surchauffe, la taille des particules diminue. La taille des particules diminue avec l'augmentation de la pression du gaz inerte et la taille des particules diminue considérablement avec la diminution du diamètre du fil [24].

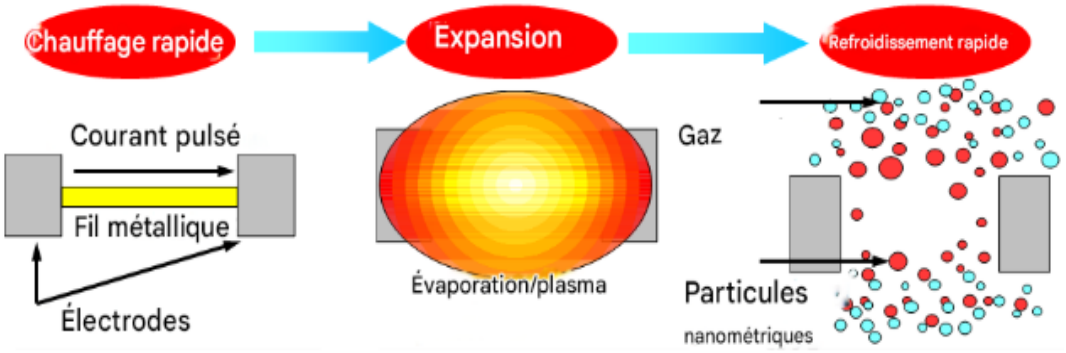



**Figure I.4** : Production de nanoparticules par évaporation de fil d'impulsion [25].

La méthode en deux étapes :

Pour cette méthode, les nanoparticules sont pré-préparées par des procédés chimiques, physiques ou mécaniques tels que le broyage, puis les nanoparticules sont dispersées dans le fluide de base à l'aide d'un équipement de mélange ou d'un dispositif de vibration ultrasonique pour éviter l'agglomération des particules. Le principal avantage du procédé en deux étapes est qu'il peut être produit en grandes quantités à faible coût. Le défi réside dans le processus de mélange et de dispersion et dans la production d'une suspension homogène de fines nanoparticules qui ne s'agrègent pas [24].

## 4. Les propriétés thermo physiques des nano-fluides :

### 4.1. La fraction volumique ($\phi$) :

La fraction volumique est la propriété la plus importante d'un nano-fluides, puisque le calcul de toutes les autres propriétés dépend de la fraction volumique du nano-fluides [26]. Et fait référence au rapport du volume des nanoparticules au volume total (fluide de base + nanoparticules).

$$\varphi = \frac{\text{Volume solide}\left(\text{nanoparticules}\right)}{\text{Volume totale du nanofluide}} = \frac{V_s}{V_T} \qquad (1.10)$$

### 4.2. La masse volumique ($\rho$) :

La masse volumique des nano-fluides est proportionnelle à la fraction volumique en particules et augmente avec l'ajout des nanoparticules. Elle s'exprime par la relation suivante :

$$\rho_{nf} = \left(\frac{m}{V}\right)_{nf} = \frac{m_f + m_s}{V_f + V_s} = \frac{\rho_f V_f + \rho_s V_s}{V_f + V_s} \quad (1.11)$$

On en déduit alors la masse volumique du nano-fluides :

$$\rho_{nf} = (1-\varphi)\rho_f + \varphi\rho_s \quad (1.12)$$

Où :

$\rho_{nf}$ : La masse volumique du nano-fluides.

$\rho_f$ : La masse volumique du fluide de base.

$\rho_s$ : La masse volumique des nanoparticules solides [20].

### 4.3. La conductivité thermique ($k$) :

La conductivité thermique (W/m.K) notée k est définie comme la capacité d'un matériau à conduire ou à transférer la chaleur. Cette propriété est très importante et est considérée comme un indicateur potentiel d'amélioration des performances thermiques d'un fluide caloporteur. Il existe plusieurs modèles pour calculer la conductivité thermique des nano-fluides. Les modèles les plus utilisés sont :

#### a. Modèle de Maxwell (1873) :

Maxwell présente son modèle de calcul de la thermique conductrice d'un nano-fluides en fonction de la fraction volumique de nano-fluides, car ce modèle est valable uniquement dans le cas de nano-fluides qui contiennent des nanoparticules sous-formant des sphériques.

Ce modèle s'exprime par :

$$k_{nf} = \frac{k_s + 2k_f + 2\varphi(k_s - k_f)}{k_s + 2k_f + \varphi(k_f + k_s)} k_f \quad (1.13)$$

$k_{nf}$,$k_f$ et $k_s$ désignent respectivement les conductivités thermiques du nano-fluide, du fluide de base et des particules solides.

#### b. Modèle de Hamilton-Crosser (1962) :

Le modèle de Hamilton et Crosser a été établi pour résoudre la limite de modèle de Maxwell. Puisque ce dernier n'a valable que dans le cas des particules sphériques.

Conductivité thermique apparente du milieu est donnée par l'expression suivante :

$$k_{nf} = \frac{k_s + (n-1)k_f - (n-1)(k_s - k_f)\varphi}{k_s + (n-1)k_f + (k_f - k_s)\varphi} k_f \quad (1.14)$$

Où (n) est un facteur de forme :

$n$ = 3 pour les particules sphériques et n = 6 pour les particules cylindriques [27].

### 4.4. La chaleur spécifique ($Cp$) :

La chaleur spécifique correspond à l'apport de chaleur nécessaire pour élever la température de l'unité de substance de 1 °K lors de la transformation considérée. Pour la détermination de la chaleur spécifique d'un nano-fluide, on peut citer les deux modèles suivants [28] :

**a. Modèle du Pak et Cho (1998) :**

$$Cp_{nf} = (1-\varphi)Cp_f + \varphi Cp_s \quad (1.15)$$

**b. Modèle du Xuan et Roetzel (2000) :**

$$\rho Cp_{nf} = (1-\varphi)(\rho Cp)_f + \varphi(\rho Cp)_s \quad (1.16)$$

### 4.5. La viscosité dynamique ($\mu$) :

La viscosité caractérise l'aptitude d'un fluide à s'écouler. L'ajout des nanoparticules permet d'augmenter et d'améliorer la conductivité thermique du nano-fluide, mais cela peut aussi conduire à une augmentation défavorable de la viscosité dynamique. De nombreuses études théoriques et expérimentales ont été menées afin d'estimer ou de mesurer la viscosité dynamique des nano-fluides. Parmi les modèles les plus utilisés [29] :

**a. Modèle d'Einstein (1906) :**

$$\mu_{nf} = \mu_f (1 + 2.5\varphi) \quad (1.17)$$

Cette relation est valable juste pour $\varphi$ = 0,03 (3%).

**b. Modèle Pack et Cho (1998) :**

$$\mu_{nf} = \mu_f (533.9\varphi^2 + 39.11\varphi + 1) \quad (1.18)$$

**c. Modèle Maiga et al. (2005) :**

$$\mu_{nf} = \mu_f (123\varphi^2 + 7.3\varphi + 1) \quad (1.19)$$

## I.3. Généralités sur les milieux poreux :

### 1. Définition :

On appel un milieu poreux toutes matrices solides comportant des vides ou cavités au travers desquelles un fluide peut s'écouler. Ces espaces vides qui peuvent être connectés sont appelés pores. On rencontre plusieurs matériaux poreux dans la nature ou l'industrie. Il peut s'agir d'empilement de billes, de béton, de roche, de gisement de pétrole, de sable,…, etc. [30].

### 2. Classification des milieux poreux :

Le milieu poreux se présente sous deux formes :

- Milieu poreux, non cohésif, où la phase solide est constituée de grains non cimentés entre eux (gravier, sable, marbre, etc.).
- Milieu poreux cohésif, où la phase solide est constituée de grains collés ou soudés entre eux (calcaire, grès, céramique, etc.) [10].

### 3. Caractéristiques géométriques des milieux poreux :

### 3.1. Volume Élémentaire Représentatif (VER) :

L'échelle du pore d varie généralement de 0.05µm pour les nanopores, à 0.5mm pour les macropores. Or la distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. A cette échelle, la pression, la vitesse, la température varient donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Elles ont pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu poreux *L*. Cette moyenne s'effectue donc sur des nombreux pores par l'intermédiaire d'un Volume Elémentaire Représentatif V.E.R.

On obtient donc les grandeurs caractéristiques de la vitesse, la pression et la température, en les moyennant sur le V.E.R [31].

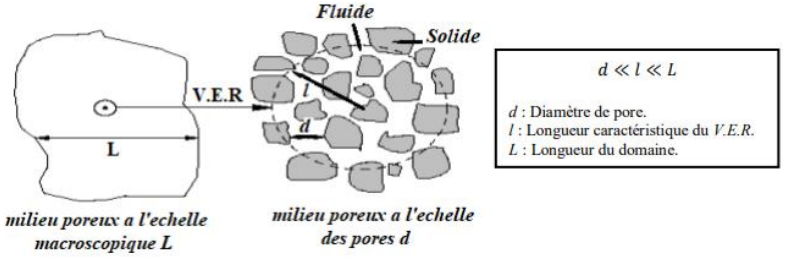



**Figure 1.5** : Représentation schématique du V.E.R [18].

### 3.2. La porosité ($\varepsilon$) :

C'est la fraction du volume V du système qui n'est pas occupée par la phase solide. Soit [10] :

$$\varepsilon = \frac{Volume\ des\ pores}{Volume\ total\ du\ milieu\ poreux} \tag{1.20}$$

*Volume total du milieu poreux = volume des solides + volumes des pores*

La porosité est dite totale ou absolue ($\varepsilon_t$) quand le rapport du volume occupé par les pores au volume du milieu poreux prend en compte les pores occlus ; alors que la porosité est effective ou utile ($\varepsilon_{eff}$) lorsque le rapport volumique tient compte seulement des pores interconnectés [28]. On définit alors :

- **La porosité totale (absolue) :**

$$\varepsilon_t = \frac{Volume\ tous\ les\ pores}{Volume\ total\ du\ milieu\ poreux} \tag{1.21}$$

- **La porosité effective (utile) :**

$$\varepsilon_{eff} = \frac{Volume\ des\ pores\ interconnectés}{Volume\ total\ du\ milieu\ poreux} \tag{1.22}$$

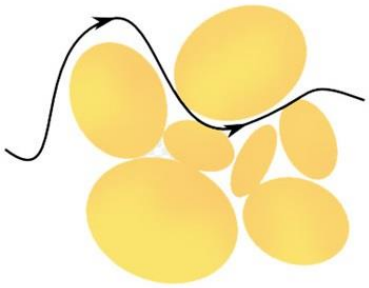


**Figure 1.6** : la porosité effective ou utile [32].

### 3.3. La tortuosité ($\tau$) :

C'est le rapport entre la longueur moyenne du chemin suivi par une particule fluide entre deux points de la matrice poreuse ($L_e$) et la longueur en ligne droite entre ces deux points ($L$) [10] :

$$\tau = \frac{L_e}{L} \tag{1.23}$$

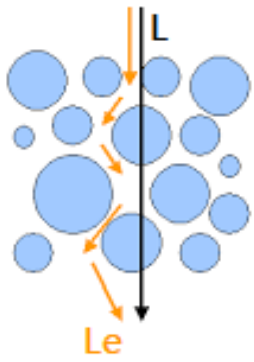



**Figure 1.7** : Définition schématique de la tortuosité [18].

### 3.4. Perméabilité (*K*) :

La perméabilité traduit la facilité avec laquelle le fluide s'écoule dans le milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression. Elle est exprimée par la relation suivante appelée loi de Darcy [30] :

$$K = -\frac{\mu U_D}{dP/dx} \tag{1.24}$$

$\mu$ : Viscosité dynamique du fluide.

$U_D$ : Vitesse Darcienne (ou filtration).

$dP/dx$ : Gradient de pression.

L'unité de la perméabilité est le m², mais elle est souvent exprimée en Darcy :

1 Darcy= $9.87\times10^{-13}$ m².

### 3.5. La surface spécifique ($A_s$) :

La surface spécifique est définie comme l'aire totale des vides rapportée à l'unité de volume, soit [33] :

$$A_s = \frac{Aire\ totale\ des\ vides}{volume\ total\ du\ milieu} \tag{1.25}$$

## 4. Les modèles d'écoulement dans les milieux poreux :

### 4.1. Modèle de Darcy (1856) :

Darcy a obtenu une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression pour un écoulement unidimensionnel conduit par gravité à travers un milieu poreux non consolidé dont les particules sont à peu près de mêmes dimensions [21] :

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu}\left(\vec{\nabla}_P + \rho\vec{g}\right) \tag{1.26}$$

$\mu$ : viscosité dynamique du fluide (kg/m.s).

$\vec{\nabla}_P$ : Gradient de pression (Pa/m).

$\rho g$ : Forces de volume.

$K$ : perméabilité du milieu poreux (m²).

### 4.2. Modèle de Darcy - Forchheimer (1901) :

Forchheimer a proposé une modification empirique de la loi de Darcy en rajoutant une relation non linéaire du second ordre entre le gradient de pression et la vitesse de filtration. Cette formulation appelée de Darcy - Forchheimer.

$$\overrightarrow{\nabla_p} = -\frac{\mu}{K}\vec{v} + \rho g - F\frac{\rho}{\sqrt{K}}|\vec{v}|\vec{v} \tag{1.27}$$

F est coefficient de forchheimer. Lorsque $Re \leq 1$, l'état de Darcy domine. À partir du nombre de Reynolds du milieu poreux d'ordre $Re = 1$, l'état de Darcy se transforme en état de Darcy -Forchheimer, et pour $Re >> 1$, l'état de Forchheimer domine [34].

### 4.3. Modèle de Brinkman (1947) :

Dans le cas où la porosité est importante (de l'ordre de 0.8), il faut tenir compte des effets de diffusion visqueuse au niveau des parois. Pour cette situation Brinkman propose de modifier l'équation de Darcy de la façon suivante [35] :

$$\overrightarrow{\nabla_p} = -\frac{\mu}{K}\vec{v} + \rho g + \mu_{eff}\nabla^2\vec{v} \tag{1.28}$$

$\mu_{eff}$ : représente la viscosité effective du milieu poreux. En général $\mu_{eff}$ est considéré équivalente à la viscosité dynamique de fluide $\mu$.

### 4.4. Modèle général ou modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer :

En combinant les équations précédentes, on peut obtenir la relation suivante qui est équivalente au d'une équation de quantité de mouvement en milieu fluide :

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\frac{\rho}{\varepsilon^2}\left(\vec{v}\nabla\vec{v}\right)=-\nabla\vec{P}+\rho g-\frac{\mu}{K}\vec{v}+\mu_{eff}\nabla^2\vec{v}-F\frac{\rho}{\sqrt{K}}|\vec{v}|\vec{v} \qquad (1.29)$$

### 5. Régimes d'écoulement dans les milieux poreux :

En 1984 Dybbs et Edwards ont réalisé un travail expérimental o ù ils ont mesuré la distribution de vitesse (en 3D) en considérant un nombre de Reynolds basé sur une vitesse moyenne dans les pores, Up, et un diamètre moyen des particules d. Ils ont mis en évidence quatre (05) régimes d'écoulement basé sur ce nombre de Reynolds [33].

- Ecoulement rampant ou écoulement de Darcy ($Re_d < 1$).
- Régime d'écoulement inertiel (Régime de Forchheimer) ($1\text{-}10 < Red < 150$).
- Régime laminaire stationnaire ($150 < Re_d < 300$).
- Régime instationnaire et chaotique ($Re_d > 300$).
- Transition à la turbulence ($Re_d >> 300$).

## I.4. Etat de l'art :

Afin de voir l'effet du changement de perméabilité, Damene [36], a suivi l'évolution de la structure de l'écoulement et du transfert de chaleur à l'intérieur des cavités horizontales et verticales numériquement et analytiquement avec des conditions aux limites de Neumann, en changeant les lois de perméabilité (K), grâce à ce suivi nous savons que L'augmentation du paramètre favorise la convection dans le cavité dans le cas de la variation de la perméabilité suivant la loi parabolique, alors que cette augmentation fait freiner la convection quand la perméabilité est variée suivant la loi exponentielle ou linéaire.

Zidi et Nacer [37], ont étudié l'effet de la forme géométrique du milieu poreux sur le refroidissement des composants électroniques. Trois formes ont été étudiées : carrée, circulaire et triangulaire, disposées autour du composant électronique à l'intérieur d'un canal en aluminium. Les résultats ont montré que la configuration circulaire était la plus efficace en termes de refroidissement. La température maximale du composant électronique dans cette configuration est de 318 K°, contre 326 K° et 322 K° pour les configurations carrée et triangulaire, respectivement. Cette efficacité accrue est due à la forme circulaire du milieu

poreux dans le canal. Les résultats ont également montré que la température du composant électronique diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

Dans un article sur la convection naturelle stable dans une cavité carrée poreuse bidimensionnelle remplie d'un nano-fluide. Groşan et al [38], ils ont découvert que l'ajout de nanoparticules au milieu poreux saturé de fluide réduit la température et améliore le transfert de chaleur lorsque la conductivité thermique des nanoparticules est beaucoup plus élevée que la conductivité thermique de la structure solide du milieu poreux. Cet ajout n'a quasiment aucun effet sur les propriétés d'écoulement et de transfert de chaleur lorsque les valeurs de conductivité thermique des nanoparticules et la conductivité thermique de la structure solide du milieu poreux sont proches.

Connaître l'effet du nombre de Rayleigh ($R_T$), de l'indice de loi de puissance ($n$), du rapport de flottabilité ($N$) et du nombre de Lewis ($Le$) sur le début du mouvement convectif linéaire et non linéaire, ainsi que sur les taux de transfert de chaleur et de masse. Saleh et al [39], ont présenté un article intitulé « Étude numérique de la stabilité linéaire et non linéaire de la convection de solutés dans un milieu poreux saturé d'un fluide binaire non newtonien ». Les résultats montrent que l'augmentation de l'indice de puissance (fluides expansifs) augmente la viscosité apparente tandis que sa diminution (fluides semi-plastiques) la diminue, et ceci est constant dans le cas d'un fluide newtonien ($n$ = 1). Il a été observé que les profils de température montrent une augmentation avec l'augmentation des valeurs de l'indice de puissance ($n$). Il a été constaté que l'intensité de convection (Ψ), la chaleur générée ($Nu$) et les taux de transfert de masse ($Sh$) augmentent avec la diminution de ($n$) et ($N$), tandis qu'ils diminuent avec la diminution de ($Le$).

Saleh et al [40], Il a réalisé une étude numérique de la convection naturelle avec double diffusion d'un fluide non newtonien obéissant à une loi de puissance dans un milieu poreux saturé à l'intérieur d'une cavité carrée inclinée. L'étude examine l'effet du nombre de Rayleigh, ($R_T$), de l'indice de loi de puissance ($n$), du rapport de flottabilité ($N$), du nombre de Lewis ($Le$), et l'angle d'inclinaison (Φ), sur le début du mouvement et les taux de transfert de chaleur et de masse. Les résultats montrent que la diminution du coefficient de loi de puissance, $n$, conduit à une augmentation de l'intensité de la convection à l'intérieur de la cavité et à une augmentation significative du taux de transfert de chaleur et de masse. Il a été observé que dans une cavité inclinée à (Φ) = 90° (c'est-à-dire une cavité verticale), l'augmentation du rapport de flottabilité, ($N$), améliore le transfert de chaleur et de masse en raison de la force de flottabilité dominante. Les résultats ont également montré que l'orientation de la cavité affecte de manière significative

l'intensité de l'écoulement et les taux de transfert de chaleur et de masse, quel que soit le paramètre de loi de puissance choisi ($n$).

Lounis et al [41], La convection thermosoudable dans une cavité inclinée remplie de fluides non newtoniens a été examinée numériquement. L'effet des paramètres rhéologiques de Carreau-Yasuda, le nombre de Rayleigh ($R_T$), le nombre de Lewis ($Le$), le rapport de flottabilité ($N$), les nombres de Dufour et de Soret et l'angle d'inclinaison ($\gamma$), sur l'échange thermique et massique a été démontré. Les résultats ont montré que Le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation des coefficients de Soret et de Dufour, le transfert de masse est amélioré, mais la viscosité apparente diminue. Mais la diminution de ($R_T$) améliore à la fois l'échange de chaleur et de masse et la viscosité apparente pour différentes valeurs du l'indice de loi de puissance ($n$), d'autre part, le rapport de flottabilité élevé augmente considérablement les échanges de chaleur et de masse. Mais cette augmentation conduit à une diminution de la viscosité avec la diminution de l'indice de loi de puissance ($n$).

L'article d'Ould Larbi et al [42], présente une étude numérique de la convection diffusion-diffusion dans une cavité carrée avec une couche poreuse remplie d'un fluide non newtonien. Les paramètres régissant le problème sont les paramètres rhéologiques de Carreau-Yasuda, à savoir ($n$, $E$, $s$ et $a$), le nombre de Rayleigh thermique ($R_T$), le nombre de Lewis ($Le$), le rapport de flottabilité ($N$) et l'angle d'inclinaison ($\Phi$). Les effets des paramètres directeurs mentionnés, ont été illustrés. Les résultats indiquent une forte influence du comportement en cisaillement du fluide non-newtonien sur le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle à l'intérieur de l'enceinte. La structure de l'écoulement évolue de la conduction à la convection lorsque le rapport de flottabilité augmente. Les nombres de Nusselt ($Nu$), et de Sherwood ($Sh$), augmentent le long du chemin de transition. Le nombre moyen de ($Sh$) augmente considérablement avec l'amélioration du nombre de Lewis mais le nombre moyen de ($Nu$) change légèrement. Le transfert thermique et de masse est favorisé pour un angle d'inclinaison de 45°.

L'article d'Azizou et al [43], présente une étude numérique du transfert de chaleur impliquant des nano-fluides non newtoniens dans un milieu poreux incliné sous l'influence de la MHD. Le système a été soumis à un champ magnétique incliné affectant la viscosité dynamique. Les résultats de l'étude ont montré que L'effet de l'angle d'inclinaison du champ magnétique appliqué ($\omega$) apparaît sur les valeurs de $\Psi$ et $Nu$, et la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) dans les fluides semi-plastiques non newtoniens ($n$=0,7 et $n$=0,8) contrairement aux autres fluides (extensiles

et newtoniens) l'effet est négligeable. De plus, l'effet de l'angle d'inclinaison du champ magnétique appliqué $\omega$ sur les valeurs des lignes de courant ($\Psi$) et du nombre de Nusselt moyen ($Nu_L$) est négligeable à une certaine valeur du nombre de Hartmann ($Ha$). L'étude a montré que l'angle d'inclinaison de la cavité qui donne les valeurs maximales de $\Psi_0$, $Nu_L$ et $\mu_{nf}$ est de 45°.

Connaître le comportement de la convection sous l'influence du champ magnétique. Rabhi et al [44], a présenté un article sur ce sujet intitulé : «Etude analytique et numérique des effets combinés Soret et Dufour sur la convection du soluté dans une cavité poreuse horizontale saturée d'un fluide binaire électriquement conducteur sous l'influence d'un champ magnétique». Les résultats de leur étude ont montré que l'imposition d'un champ magnétique retarde le début de la convection et que son intensification peut supprimer complètement les courants de convection. Le taux de transfert de chaleur augmente avec le nombre de Dufour et diminue avec le nombre de Soret, et vice versa pour le taux de transfert de masse.

# Chapitre II

# Modèle Physique Et Formulation Mathématique

### II.1. Description du problème :

Cette étude se concentre sur le phénomène de convection naturelle dans milieu poreux saturé par non newtonien nano fluide (Nanotube de carbone monoparoi - eau (SWCNT Water)). La configuration géométrique bidimensionnelle de notre écoulement est illustrée à la figure (2.1) Nous analysons un scénario impliquant une cavité rectangulaire caractérisée par les dimensions géométriques suivantes : longueur $L'$, hauteur $H'$ et largeur $W'$, inclinée d'un angle $\Phi$ par rapport au plan horizontal, et contenant un milieu poreux saturé d'un fluide binaire non newtonien. Les longues parois de la cavité sont soumises à des flux de chaleur uniformes, $q'$, et à des flux de masse, $j'$. Les parois restantes sont supposées adiabatiques et imperméables.

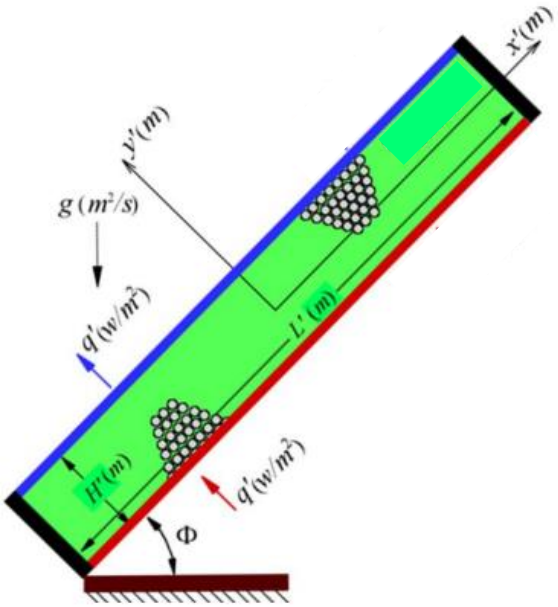



**Figure 2.1 :** Représentation schématique du modèle physique.

### II.2. Hypothèses simplifiées :

Les hypothèses simplificatrices retenues dans notre étude des phénomènes de convection naturelle sont les suivantes :

- La largeur de l'enceinte, $W'$, est considérée comme significativement plus grande que les autres dimensions ($W'/L'$ et $W'/H' >> 1$), ce qui rend les effets tridimensionnels négligeables. Cela simplifie le problème en un scénario bidimensionnel, comme illustré dans la figure II.1.
- La cavité est située dans un champ de gravité uniforme constant.

- La solution est un fluide non newtonien nano et incompressible.
- Le flux généré est supposé être laminaire.
- La matrice poreuse est isotrope, perméable et homogène.
- Il n'y a pas de réaction chimique ou de source de chaleur ou de masse et le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- Le travail, induit par des forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- Les nanoparticules ont une forme sphérique.
- Un équilibre thermique entre le fluide de base et les nanoparticules solides.
- Une homogénéité et un équilibre thermique local dans le milieu poreux.
- Le nano-fluide est simulé comme un liquide monophasé.

### II.3. Formulation mathématique :

Sous les hypothèses citées précédemment, les équations de conservation décrivant le problème sont l'équation de continuité, l'équation de conservation de l'impulsion et l'équation d'énergie. Le modèle de Dupuit-Darcy, ou loi de Darcy étendue, est adopté pour décrire l'écoulement du nano-fluide à l'intérieur du milieu poreux, incluant le terme non linéaire de l'effet inertiel sur l'écoulement du fluide.

On suppose que la matrice poreuse est solide, perméable, homogène, isotrope et saturée par le nano-fluide. Les équations relatives aux flux de chaleur et de matière en présence d'un gradient thermique, sont données par :

L'équation de continuité exprimant le principe de conservation de la masse d'un fluide en mouvement est donnée par :

$$\nabla \cdot \overrightarrow{V}' = 0 \qquad (2.1)$$

La formulation locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit comme suit :

$$\frac{\mu'_{nf}}{K}\overrightarrow{V}' = -\nabla p' - \rho_{nf}\,\vec{g} \qquad (2.2)$$

Le premier principe de la thermodynamique permet d'établir des relations entre les différentes formes d'énergie présentes dans les milieux poreux. L'équation de l'énergie, dans laquelle les termes de dissipation visqueuse sont négligés, s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial T'}{\partial \tau'} + \overrightarrow{V'}.\nabla T' = \alpha_{nf} \nabla^2 T' \qquad (2.3)$$

Dans la présente analyse, $\vec{V}'$ signifie le vecteur vitesse, $p'$ la pression, $\vec{g}$ le vecteur accélération gravitationnelle, $\alpha_{nf}$ la diffusivité thermique du milieu poreux saturé en nano-fluide, $\mu'_{nf}$ la viscosité apparente du nano-fluide, et $t$ est le temps. La perméabilité du milieu poreux, $K$.

Les changements de densité causés par la flottabilité sont décrits à l'aide de l'approximation de Boussinesq (Tiwari et Das, [45]).

$$\rho_{nf} = \rho_{nf,0}\left[1-\left(\beta'_T\right)_{nf}\left(T'-T'_0\right)\right] \qquad (2.4)$$

Ici, $T'_0$ et $\rho_{nf,0}$ désignent respectivement la température de référence et la masse volumique. $(\beta'_T)_{nf}$ représente le coefficient de dilatation thermique du nano-fluide.

En éliminant le terme de pression des équations de quantité de mouvement, les équations gouvernantes peuvent être exprimées comme suit :

$$\mu'_{nf}\left[\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}\right] + \left[v'\frac{\partial \mu'_{nf}}{\partial x'} - u'\frac{\partial \mu'_{nf}}{\partial y'}\right] = Kg\,\rho_{nf,0}\left(\beta'_T\right)_{nf}\left[\frac{\partial T'}{\partial x'}\cos\Phi - \frac{\partial T'}{\partial y'}\sin\Phi\right] \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \tau'} + u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + v'\frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha_{nf}\nabla^2 T' \qquad (2.6)$$

Les propriétés du nano-fluide, y compris sa densité $\rho_{nf}$ son coefficient de dilatation thermique $(\rho\beta'_T)_{nf}$ et sa capacité thermique $(\rho C_p)_{nf}$ sont déterminées à l'aide du modèle de nano-fluide proposé par Tiwari et Das [45], tel qu'exprimé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_{nf} &= (1-\phi)\rho_f + \phi\rho_p \quad , \\ (\rho\beta'_T)_{nf} &= (1-\phi)(\rho\beta'_T)_f + \phi(\rho\beta'_T)_p \quad , \\ (\rho C_p)_{nf} &= (1-\phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_p \quad , \end{aligned} \qquad (2.7)$$

La conductivité thermique λ du nano-fluide est déterminée à l'aide du modèle proposé par Xue [46] :

$$K_{nf} = K_f\left[\frac{1-\phi+2\phi\dfrac{K_{CNT}}{K_{CNT}-K_f}\ln\left(\dfrac{K_{CNT}+K_f}{2K_f}\right)}{1-\phi+2\phi\dfrac{K_f}{K_{CNT}-K_f}\ln\left(\dfrac{K_{CNT}+K_f}{2K_f}\right)}\right] \qquad (2.8)$$

Les propriétés thermo-physiques des nanoparticules SWCNT et de l'eau sont résumées dans le tableau (2.1)

**Tableau 2.1** : Propriétés thermo-physiques de l'eau et des nanotubes de carbone à paroi simple (SWCNT).

| propriétés physiques | Fluide de base (eau) | SWCNT |
|---|---|---|
| $C_p$ (J.Kg$^{-1}$.K$^{-1}$) | 4179 | 425 |
| $\rho$ (Kg.m$^{-3}$) | 997.1 | 2600 |
| $K$ (W.m$^{-1}$.K$^{-1}$) | 0.613 | 6600 |
| $\beta \times 10^{-5}$ (K$^{-1}$) | 1.47 | 1.6 |

La viscosité apparente du nano-fluide non-newtonien SWCNT–eau, $\mu'$, est déterminée à l'aide de l'équation suivante, telle que présentée par Kefayati [47] et Jain et Bhargava [48] :

$$\mu'_{nf} = \frac{\mu'_f}{(1-\phi)^{2.5}} \tag{2.9}$$

Ici, $\mu'_f$ représente la viscosité du fluide de base, caractérisée par le modèle de loi de puissance tel que décrit par Pascal [49, 50] comme suit :

$$\begin{aligned} \mu'_f &= \varepsilon\left(u'^2 + v'^2\right)^{(n-1)/2} \\ \varepsilon &= \left(\frac{2h}{8^{(n+1)/2}}\right)(K\varphi)^{(n-1)/2}\left(\frac{n}{1+3n}\right)^n \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dans ce contexte, $\varepsilon$ est un paramètre du modèle de loi de puissance, où $\varphi$ et $K$ représentent respectivement la porosité et la perméabilité du milieu poreux, tandis que $h$ désigne l'indice de consistance et $n$ est l'indice de loi de puissance.

Les équations (2.5), (2.6) et (2.9) sont exprimées sous forme adimensionnelle en introduisant un nouvel ensemble de variables comme suit :

$$\begin{aligned} (x, y) = (x', y')/H', \quad (u, v) = (u', v')H'/\alpha_f, \quad t = t'^{\alpha_f}/H'^2, \\ T = (T' - T'_0)/\Delta T', \quad \mu_{nf} = h/\varepsilon\left(\alpha_f/H'\right)^{n-1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

La fonction de flux sans dimension, notée Ψ, est définie comme suit :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \boldsymbol{v} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2.12}$$

En utilisant les équations décrites précédemment, les équations sans dimension régissant le flux convectif sont présentées comme suit :

$$\mu_{nf}\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right]+\left[\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \mu_{nf}}{\partial y}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \mu_{nf}}{\partial x}\right]=-R_T H(\phi)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\cos\Phi-\frac{\partial T}{\partial y}\sin\Phi\right) \tag{2.13}$$

$$E(\phi)\left(\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.14}$$

$$\mu_{nf}=\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2\right]^{(n-1)/2} /(1-\phi)^{2.5} \tag{2.15}$$

À partir des équations (2.13) et (2.14), plusieurs paramètres sont clairement identifiés, notamment le nombre de Rayleigh ($R_T$), ($\phi$) et ($\phi$), qui sont exprimés comme suit :

$$R_T=\frac{K\rho g \beta'_T \Delta T' (H'/\alpha_f)^n}{\varepsilon} \tag{2.16}$$

$$H(\phi)=1-\phi+\phi\frac{(\rho\beta'_T)_p}{(\rho\beta'_T)_f} \tag{2.17}$$

$$E(\phi)=\frac{k_{nf}}{k_f}\frac{(\rho C_p)_f}{(1-\phi)(\rho C_p)_f+\phi(\rho C_p)_p} \tag{2.18}$$

Les conditions limites hydrodynamiques et thermiques appliquées aux parois du système sont présentées sous leur forme adimensionnelle comme suit :

Conditions limites hydrodynamiques :

$$\begin{cases} u=\Psi=0 & \grave{a} \quad x=\pm\dfrac{A}{2} \\ v=\Psi=0 & \grave{a} \quad y=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2.19}$$

Conditions limites thermiques :

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad \boldsymbol{\grave{a}} \quad \boldsymbol{x}=\pm\frac{A}{2} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=-1 \quad \grave{a} \quad y=\pm\frac{1}{2} \tag{2.21}$$

Taux de transfert thermique :

Dans cette étude, notre objectif est de déterminer les taux de transfert de chaleur à une position spécifique $x$, qui sont quantifiés par les nombre de Nusselt, décrit comme :

$$Nu_x = \frac{q_{nf} / q_f}{T_{(x,-1/2)} - T_{(x,1/2)}} \tag{2.222}$$

Les valeurs moyennes des nombre de Nusselt sur les murs actifs sont exprimées par :

$$Nu_m = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{+A/2} Nu_x dx \tag{2.233}$$

# Chapitre III
# Solution Analytique

Une solution approximative est présentée ici pour le cas d'une cavité rectangulaire allongée (A ≫ 1). Dans ces conditions, comme le montrent les études antérieures de Vasseur et al. [51], Mamou et al. [52], Joly et al. [53], la vitesse dans la partie centrale de la couche peut être considérée comme essentiellement parallèle et alignée avec la direction *x* (voir figure 2). En conséquence, les formulations correspondantes pour les champs d'écoulement et de température sont les suivantes.

$$\Psi(x,y) \approx \Psi(y) \tag{3.1}$$

$$T(x,y) \approx C_T x + \theta_T(y) \tag{3.2}$$

Le terme $C_T$ désigne une constante qui caractérise le gradient de température dans la direction x.

En substituant les équations (3.1) et (3.2) dans les équations (2.13) et (2.14), et en considérant que l'écoulement est en régime permanent, les expressions suivantes sont obtenues :

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{d\Psi}{dy}\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^{n-1}\right] = -R_T H(\phi)\left(\frac{dT}{dx}\cos\Phi - \frac{dT}{dy}\sin\Phi\right) \tag{3.3}$$

$$E(\phi)\frac{d^2\theta}{dy^2} = C_T\frac{d\Psi}{dy} \tag{3.4}$$

Par l'application des conditions aux limites des équations (2.20) et (2.21), ainsi que de la première intégration de l'équation (3.4), l'expression suivante est dérivée :

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{C_T}{E(\phi)}\Psi(y) - 1 \tag{3.5}$$

À partir des équations (3.3) et (3.5), l'équation de quantité de mouvement peut être dérivée comme suit :

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{d\Psi}{dy}\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|^{n-1}\right] - \frac{H(\phi)}{E(\phi)}R_T C_T \Psi(y)\sin\Phi = -R_T H(\phi)\left(C_T\cos\Phi + \sin\Phi\right) \tag{3.6}$$

Lorsqu'un flux thermique prescrit est présent, la conservation de l'énergie dans le volume de contrôle, comme illustré à la figure 2.1, est régie par les formulations antérieures présentées dans la littérature (Trevisan et Bejan [**]) par la relation suivante :

$$E(\phi)\int_{-1/2}^{+1/2}\frac{\partial T}{\partial x}dy + \int_{-1/2}^{+1/2}\frac{\partial \Psi}{\partial y}T dy = 0 \tag{3.7}$$

L'évaluation des équations (3.5) et (3.7) donne une formulation directe du coefficient de gradient de température $C_T$ :

$$C_T = \frac{E(\phi)\int_{-1/2}^{+1/2}\Psi(y)\,dy}{E^2(\phi)+\int_{-1/2}^{+1/2}\Psi^2(y)\,dy} \tag{3.8}$$

L'équation (3.8), dont les valeurs initiales sont estimées pour $C_T$ et soumises aux conditions aux limites décrites dans les équations (2.19) à (2.21), est résolue numériquement par la méthode TRIDAG afin de déterminer le champ de fonction de courant Ψ. Initialement, cette équation est discrétisée par une approche aux différences finies. Ensuite, en utilisant le schéma d'intégration de Simpson, de nouvelles valeurs pour CT sont dérivées en exécutant l'intégration numérique décrite dans l'équation (3.8). Ce processus itératif persiste jusqu'à ce que la convergence soit atteinte pour $C_T$ et Ψ. Des solutions initiales intentionnellement choisies sont utilisées, couplées à une technique de relaxation, pour accélérer la convergence et stabiliser les solutions recherchées. Ensuite, les champs de température, T, sont évalués en résolvant l'équation (3.5), ainsi que leurs conditions aux limites correspondantes détaillées dans les équations (2.20) et (2.21). Par conséquent, le nombre de Nusselt sont calculé à l'aide d'équation (2.23). Cette méthode semi-analytique réduit considérablement le temps de calcul par rapport à la procédure numérique nécessaire à la résolution complète des équations (2.13) et (2.14).

# Chapitre IV
# Solution Numérique

Ce chapitre utilise une approche numérique pour résoudre les équations différentielles non linéaires. La méthode proposée s'appuie sur la technique des différences finies, une méthode numérique classique datant du XVIIIe siècle et initiée par Euler. Cette méthode est particulièrement adaptée et simple aux problèmes impliquant des géométries simples. Elle consiste à discrétiser les équations continues en des nœuds spécifiés sur un maillage prédéfini, comme illustré à la figure 3.1.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, chaque nœud est désigné par la paire d'indices $(i, j)$ indiquant les lignes d'intersection du maillage. Les nœuds voisins sont implicitement définis en augmentant ou en diminuant l'un des indices d'un incrément unitaire.

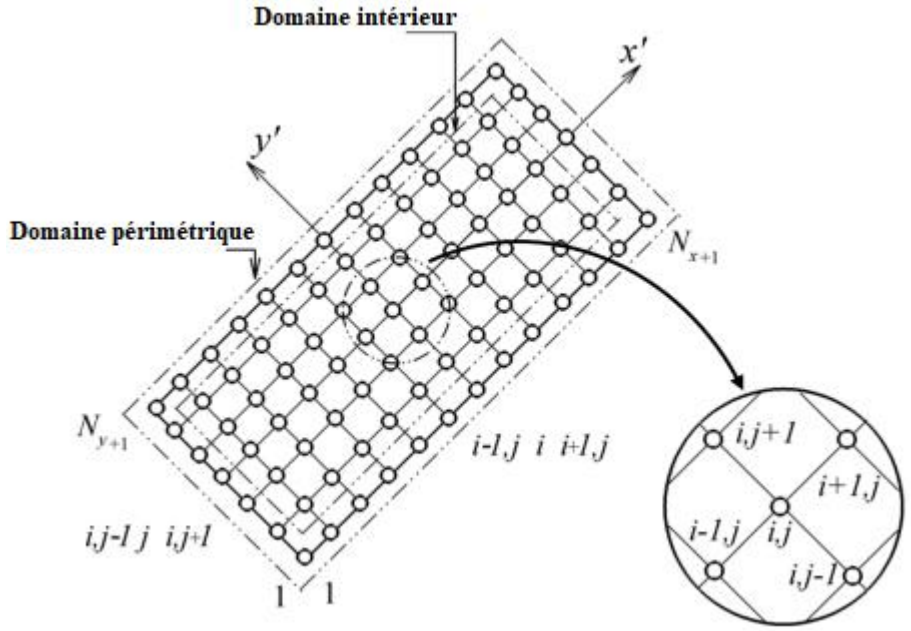



**Figure 4.1 :** Maillage du domaine de calcul dans $(i, j)$.

Pour les problèmes de géométrie simples Fig. 3.1, la méthode des différences finies utilisée pour résoudre numériquement les équations gouvernantes (2.13). Les équations d'énergie sont discrétisées avec un schéma centré du second ordre. Pour chaque pas de temps la méthode implicite à directions alternées (ADI) de Peaceman et Rachford [54] donne naissance à deux systèmes matriciels tri-diagonaux à résoudre, l'un résultant de la discrétisation implicite en $x$ et l'autre de la discrétisation implicite en $y$. La méthode (ADI) divise le pas de temps en deux parties égales, dans le premier demi-pas de temps, le système est implicitement en $x$ mais explicitement en $y$ et dans le second demi-pas de temps, le système est implicitement en $y$ et explicitement en $x$. Pour chaque pas de temps, la solution est obtenue en parcourant le domaine de calcul dans la direction $x$ puis dans la direction $y$. Connaissant les champs de

température à l'instant ($n$ + 1), pour résoudre l'équation de mouvement discrétisée (2.13) à chaque pas de temps, on utilise la méthode de sur relaxation successive (SOR) proposée par Frankel (1950) [55] qui est une méthode explicite donnant directement la valeur de Ψ à l'instant ($n$ + 1), au nœud considéré, à condition qu'un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit satisfait.

### IV.1. Discrétisation des conditions aux limites thermiques :

Les conditions aux limites (2.20) sont discrétisées à l'aide d'un schéma aux différences finies centrées à droite et à gauche du second ordre, qui dépend de la paroi spécifique considérée.

**Selon les parois adiabatiques et imperméables :** $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$

$$T_{1,j} = \frac{4T_{2,j} - T_{3,j}}{3} \quad \text{at} \quad x = -\frac{A}{2} \tag{4.1}$$

$$T_{Nx+1,j} = \frac{4T_{Nx,j} - T_{Nx-1,j}}{3} \quad \text{at} \quad x = \frac{A}{2} \tag{4.2}$$

**Selon les murs actifs :** $\dfrac{\partial T}{\partial x} = -1$

$$T_{i,1} = \frac{4T_{i,2} - T_{i,3} + 2\Delta y}{3} \quad \text{at} \quad y = -\frac{1}{2} \tag{4.3}$$

$$T_{i,Ny+1} = \frac{4T_{i,Ny} - T_{i,Ny-1} - 2\Delta y}{3} \quad \text{at} \quad y = \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

### IV.2. Discrétisation de l'équation d'énergie :

L'équation d'énergie est résolue par la méthode des directions alternées implicites (ADI). L'équation d'énergie (2. 3*) est réécrite comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{\partial (vT)}{\partial y} = E(\phi)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{4.5}$$

**Schéma implicite en x et explicite en y :**

Il s'agit d'un schéma temporel centré ($n$ + 1/2) pour les dérivées x et d'un schéma temporel direct ($n$) pour les dérivées y, chaque terme de l'équation (4.5) est discrétisé comme suit :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j} = 2\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{4.6}$$

$$\left.\frac{\partial(uT)}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u^n_{i+1,j}T^{n+1/2}_{i+1,j} - u^n_{i-1,j}T^{n+1/2}_{i-1,j}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial(vT)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v^n_{i,j+1}T^n_{i,j+1} - v^n_{i,j-1}T^n_{i,j-1}}{2\Delta y} \tag{4.7}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{T^{n+1/2}_{i+1,j} - 2T^{n+1/2}_{i,j} + T^{n+1/2}_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{T^n_{i,j+1} - 2T^n_{i,j} + T^n_{i,j-1}}{\Delta y^2} \tag{4.8}$$

En substituant les équations (4.6), (4.7) et (4.8) dans l'équation (4.5), nous obtenons un système matriciel tridiagonal de la forme :

$$A_i T^{n+1/2}_{i+1,j} + B_i T^{n+1/2}_{i,j} + C_i T^{n+1/2}_{i-1,j} = D_i \tag{4.9}$$

Avec :

$$A_i = \left(\frac{u^n_{i+1,j}}{2\Delta x} - \frac{E_1(\phi)}{\Delta x^2}\right), \quad B_i = \left(\frac{2}{\Delta t} + \frac{E_1(\phi)}{\Delta x^2}\right), \quad C_i = \left(\frac{u^n_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{E_1(\phi)}{\Delta x^2}\right)$$

$$D_i = \left[-\frac{v^n_{i,j+1}}{2\Delta y} + \frac{E_1(\phi)}{\Delta y^2}\right]T^n_{i,j+1} + 2\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{E_1(\phi)}{\Delta y^2}\right]T^n_{i,j} + \left[\frac{v^n_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{E_1(\phi)}{\Delta y^2}\right]T^n_{i,j-1}$$

En remplaçant les conditions aux limites (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4) dans l'équation (4.9), nous obtenons la forme discrète implicite en x sous la forme suivante :

pour $i = 2$ $$\left(A_2 - \frac{1}{3}C_2\right)T^{n+1/2}_{3,j} + \left(B_2 + \frac{4}{3}C_2\right)T^{n+1/2}_{2,j} = D_2 \tag{4.10}$$

pour $i=Nx$ $$\left(\frac{4}{3}A_{Nx} + B_{Nx}\right)T^{n+1/2}_{Nx} + \left(C_{Nx} - \frac{1}{3}A_{Nx}\right)T^{n+1/2}_{Nx-1,j} = D_{Nx} \tag{4.11}$$

**Schéma implicite en y et explicite en x :**

Il s'agit d'un schéma en temps centré ($n$ + 1/2) pour les dérivées en x et en temps direct ($n$ + 1) pour les dérivées en y. La discrétisation des dérivées partielles est donnée par :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j} = 2\frac{T^{n+1}_{i,j} - T^{n+1/2}_{i,j}}{\Delta t} \tag{4.12}$$

$$\left.\frac{\partial(uT)}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{u^n_{i+1,j}T^{n+1/2}_{i+1,j} - u^n_{i-1,j}T^{n+1/2}_{i-1,j}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial(vT)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{v^n_{i,j+1}T^{n+1}_{i,j+1} - v^n_{i,j-1}T^{n+1}_{i,j-1}}{2\Delta y} \tag{4.13}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{T^{n+1/2}_{i+1,j} - 2T^{n+1/2}_{i,j} + T^{n+1/2}_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{T^{n+1}_{i,j+1} - 2T^{n+1}_{i,j} + T^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta y^2} \tag{4.14}$$

En substituant les équations (4.12), (4.13) et (4.14) dans l'équation (4.5), nous obtenons un système matriciel tridiagonal de la forme :

$$E_i T_{i,j+1}^{n+1} + F_i T_{i,j}^{n+1} + G_i T_{i,j-1}^{n+1} = H_i \tag{4.15}$$

Avec :

$$E_j = \left[ \frac{E_1(\phi)}{\Delta y^2} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right], \quad F_j = \left[ \frac{2}{\Delta t} + \frac{2E_1(\phi)}{\Delta y^2} \right], \quad G_j = \left[ \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{E_1(\phi)}{\Delta y^2} \right]$$

$$H_j = \left[ \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{E_1(\phi)}{\Delta x^2} \right] T_{i+1,j}^{n+1/2} + \left[ \frac{2E_1(\phi)}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta t} \right] T_{i,j}^{n+1/2} + \left[ \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{E_1(\phi)}{\Delta x^2} \right] T_{i-1,j}^{n+1/2}$$

En remplaçant les conditions aux limites (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4) dans l'équation (4.15), nous obtenons la forme discrète implicite en y sous la forme suivante :

pour $j = 2$ $$\left( E_2 - \frac{1}{3} G_2 \right) T_{i,3}^{n+1} + \left( F_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) T_{i,2}^{n+1} = H_2 - \frac{2\Delta y}{3} G_2 \tag{4.16}$$

pour $j=Ny$ $$\left( \frac{4}{3} E_{Ny} + F_{Ny} \right) T_{i,Ny}^{n+1} + \left( G_{Ny} - \frac{1}{3} E_{Ny} \right) T_{i,Ny-1}^{n+1} = H_{Ny} + \frac{2\Delta y}{3} E_{Ny} \tag{4.17}$$

### IV.3. Discrétisation de la vitesse :

Les composantes du champ de vitesse sont déduites de la fonction de courant par les équations (2.12). En utilisant un schéma aux différences finies centrées du premier ordre, la discrétisation de ces équations donne :

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \tag{4.18}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \tag{4.19}$$

### IV.4. Discrétisation des conditions aux limites de vitesse :

Les conditions aux limites de vitesse sont discrétisées à l'aide d'un schéma de différences finies centrées du troisième ordre sur les côtés droit et gauche.

$$\left.\begin{aligned} u_{1,j} &= 0, \qquad v_{1,j} = -\frac{4\Psi_{2,j} - 3\Psi_{1,j} - \Psi_{3,j}}{2\Delta x}, \qquad \text{at} \quad x = -\frac{A}{2} \\ u_{Nx+1,j} &= 0, \quad v_{Nx+1,j} = -\frac{3\Psi_{Nx+1,j} - 4\Psi_{Nx,j} - \Psi_{Nx-1,j}}{2\Delta x}, \quad \text{at} \quad x = +\frac{A}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{i,1}=0, \quad u_{i,1}=\frac{4\Psi_{i,2}-3\Psi_{i,1}-\Psi_{i,3}}{2\Delta y}, \quad \text{at} \quad y=-\frac{1}{2} \\ v_{i,Ny+1}=0, \quad u_{i,Ny+1}=\frac{3\Psi_{i,Ny+1}-4\Psi_{i,Ny}-\Psi_{i,Ny-1}}{2\Delta y}, \quad \text{at} \quad y=+\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

### IV.5. Discrétisation de la viscosité :

En remplaçant les équations (4.18) à (4.21) dans l'équation (4.17), on obtient la viscosité discrète comme suit :

$$\mu_{nf\,(i,j)}^{n+1}=\left[\left(u_{i,j}^{n+1}\right)^2+\left(v_{i,j}^{n+1}\right)^2\right]^{(n-1)/2}\Big/\left(1-\phi\right)^{2.5} \qquad (4.22)$$

### IV.6. Discrétisation de l'équation de mouvement :

L'équation de mouvement du milieu poreux, régie par la loi de puissance, peut être exprimée de la manière suivante :

$$\mu_{nf}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\mu_{nf}}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\mu_{nf}}{\partial x}=-R_T H\left(\phi\right)\left[\frac{\partial T}{\partial x}\cos\Phi-\frac{\partial T}{\partial y}\sin\Phi\right] \qquad (4.23)$$

Chaque terme de l'équation de mouvement (4.23) est discrétisé à l'aide d'un schéma centré standard.

$$\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right|_{i,j}=\frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1}-2\Psi_{i,j}^{n+1}+\Psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}, \qquad \left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right|_{i,j}=\frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1}-2\Psi_{i,j}^{n+1}+\Psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \qquad (4.24)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i,j}=\frac{T_{i+1,j}^{n+1}-T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{i,j}=\frac{T_{i,j+1}^{n+1}-T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \qquad (4.25)$$

$$\left.\frac{\partial\mu_{nf}}{\partial x}\right|_{i,j}=\frac{\mu_{nf\,(i+1,j)}^{n+1}-\mu_{nf\,(i-1,j)}^{n+1}}{2\Delta x}, \qquad \left.\frac{\partial\mu_{nf}}{\partial y}\right|_{i,j}=\frac{\mu_{nf\,(i,j+1)}^{n+1}-\mu_{nf\,(i,j-1)}^{n+1}}{2\Delta y} \qquad (26)$$

En substituant les expressions (4.18) à (4.22) et (4.24) à (4.26) dans l'équation (4.23), nous dérivons la forme générale de la fonction suivante :

$$\begin{aligned}\Psi_{i,j}^{(n+1),(k+1)}=(1-\omega)\Psi_{i,j}^{(n+1),k}+\omega\Big\{&a_{px}\left(\Psi_{i+1,j}^{(n+1),k}-\Psi_{i-1,j}^{(n+1),(k+1)}\right)+a_{py}\left(\Psi_{i,j+1}^{(n+1),k}-\Psi_{i,j-1}^{(n+1),(k+1)}\right)+\\ &a_{cx}\left(\Psi_{i+1,j}^{(n+1),k}+\Psi_{i-1,j}^{(n+1),(k+1)}\right)+a_{cy}\left(\Psi_{i,j+1}^{(n+1),k}+\Psi_{i,j-1}^{(n+1),(k+1)}\right)+a_{TSx}\left[\left(T_{i+1,j}^{n+1}-T_{i-1,j}^{n+1}\right)\right.\\ &\left.+a_{TSy}\left[\left(T_{i,j+1}^{n+1}-T_{i,j-1}^{n+1}\right)\right]\Big\}\end{aligned} \qquad (4.27)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_p = 2\mu_{a(i,j)}^{n+1}\left[\dfrac{1}{\Delta y^2}+\dfrac{1}{\Delta x^2}\right], \quad a_{px} = \dfrac{\mu_{a(i,j)}^{n+1}}{\Delta x^2 a_p}, \quad a_{py} = \dfrac{\mu_{a(i,j)}^{n+1}}{\Delta y^2 a_p} \\ a_{cx} = \dfrac{\mu_{a(i+1,j)}^{n+1} - \mu_{a(i-1,j)}^{n+1}}{4\Delta x^2 a_p}, \quad a_{cy} = \dfrac{\mu_{a(i,j+1)}^{n+1} - \mu_{a(i,j-1)}^{n+1}}{4\Delta y^2 a_p} \\ a_{TSx} = \dfrac{H(\phi) R_T \cos\Phi}{2\Delta x a_p}, \quad a_{TSy} = -\dfrac{H(\phi) R_T \sin\Phi}{2\Delta y a_p} \end{cases} \tag{4.28}$$

Le paramètre $\omega$ est le facteur de sur-relaxation, compris entre 1 et 2, pour accélérer la convergence. Sa valeur optimale, $\omega_{opt}$, dépend de la forme du domaine, du maillage et du type de conditions aux limites.

Pour un domaine rectangulaire à maillage uniforme, $\omega_{opt}$ est donné par :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\varsigma^2}\left[1-\sqrt{1-\varsigma^2}\right], \quad Acev: \quad \varsigma = \left[\frac{\cos(\pi/N_{x+1}) + (\Delta x^2/\Delta y^2)\cos(\pi/N_{y+1})}{1+\Delta x^2/\Delta y^2}\right] \tag{4.29}$$

Où *Nx+1* et *Ny+1* sont le nombre de nœuds le long des directions *x* et *y*, respectivement.

**IV.7. Algorithme de calcul :**

Les principales étapes de notre algorithme de calcul sont les suivantes :

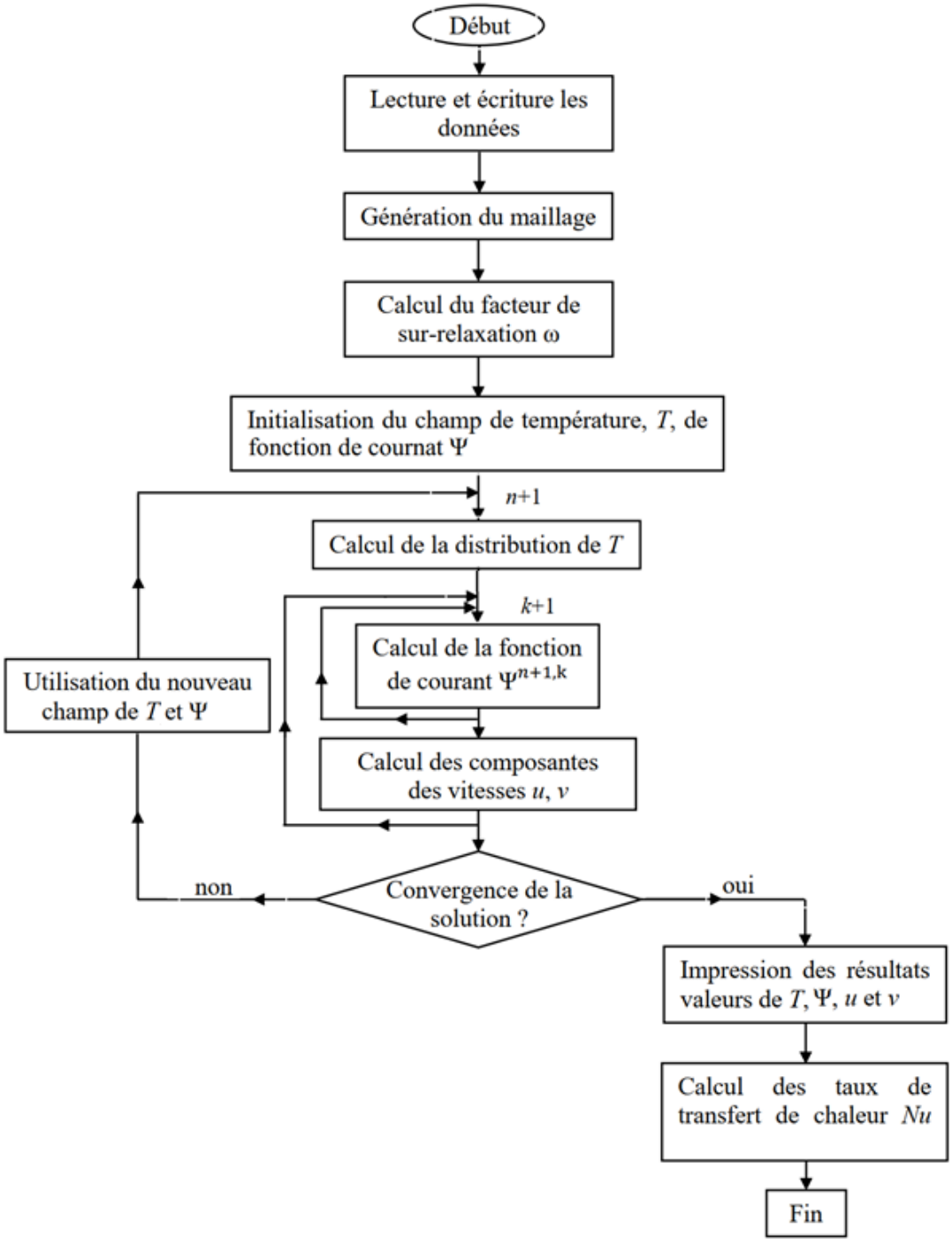
1. Génération du maillage.
2. Initialisation et lecture des données.
3. Calcul du facteur de sur-relaxation.
4. Implémentation des conditions initiales pour la température, T, et la fonction d'écoulement, Ψ.
5. Détermination des champs de vitesses initiaux, $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
6. Détermination du champ de viscosité initial, $\mu_{nf\,(i,j)}$.
7. Début de la boucle temporelle.
    - 7.1. Résolution des équations d'énergie (4.9) et (4.15) par la méthode ADI et calcul du champ de température $T_{i,j}$.
    - 7.2. Résolution de l'équation de mouvement (4.27) par la méthode SOR et calcul du champ de fonction d'écoulement $\Psi_{i,j}$.
    - 7.3. Détermination des champs de vitesses $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$.
    - 7.4. Détermination du champ de viscosité, $\mu_{nf(i,j)}$.
    - 7.5. Répétez l'étape (7.1) jusqu'à ce que la solution converge vers une solution stable ou oscillante.

8. Impression des résultats.
9. Fin du programme.

Le critère de convergence lors de la résolution de l'équation (4.27) est donné par :

$$\frac{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^{k}\right|}{\sum_i \sum_j \left|\Psi_{i,j}^{k}\right|} \leq 10^{-6} \qquad (4.30)$$

**IV.8. Organigramme de calcul :**



**IV.9. Choix de maille :**

Le choix de la taille de maille implique un équilibre délicat entre efficacité de calcul et précision des résultats. Le processus implique d'affiner la grille de manière itérative jusqu'à ce que la solution numérique converge vers la solution analytique développée dans la section suivante, en respectant un seuil de précision prédéterminé. Cette convergence est obtenue sous les valeurs stipulées pour *A*, *n*, Φ et $R_T$. Une grille uniforme de dimensions 260x140, comme indiqué dans le tableau 4.1, s'est avérée adaptée à la modélisation précise des champs d'écoulement, de température dans une cavité de taille 6 à 10. Les pas de temps de simulation ont été choisis entre $10^{-6}$ et $10^{-3}$.

**Tableau 4.1 :** tests de convergence effectués en utilisant les paramètres spécifiés suivants : $R_T$ = 100, $\phi$ = 0,05, Φ = 90° et plusieurs valeurs de l'indice de loi de puissance (*n*).

| $n$ | | Taille des mailles | | | | Solution analytique |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 80 × 40 | 140 × 80 | 180 × 100 | 260 × 140 | |
| 0.6 | $\Psi_0$ | 5.005 | 4.963 | 4.833 | 4.809 | 4.753 |
| | $Nu$ | 7.217 | 7.238 | 7.326 | 7.372 | 7.368 |
| 1.0 | $\Psi_0$ | 3.495 | 3.463 | 3.452 | 3.451 | 3.446 |
| | $Nu$ | 4.218 | 4.245 | 4.251 | 4.255 | 4.259 |
| 1.4 | $\Psi_0$ | 2.648 | 2.620 | 2.618 | 2.609 | 2.587 |
| | $Nu$ | 3.124 | 2.121 | 2.120 | 2.119 | 3.113 |

# Chapitre V

# Résultats Et Discussion

### V.1. Effet des paramètres gouvernants sur les structures d'écoulement :

#### V.1.1. Effet de l'indice de loi de puissance ($n$) :

La figure 5.1 présente les contours des lignes de courant (Ψ), les isothermes ($T$) et de la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) à l'intérieur d'une cavité verticale chauffée, sous des conditions de fonctionnement spécifiques caractérisées par $R_T$ = 100, ϕ = 0.05, Φ = 90, et pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ($n$). Les résultats montrent que l'intensité de l'écoulement et la température sont inversement liés à l'indice de loi de puissance ($n$), la valeur maximale de (Ψ) ainsi que le nombre de Nusselt ($Nu$) sont atteints pour la plus petite valeur de $n$ = 0.6. Quant à la viscosité apparente ($\mu_{nf}$), elle suit la même tendance avec la variation de l'indice de loi de puissance ($n$), tout en restant clairement constante lorsque $n$ = 1.

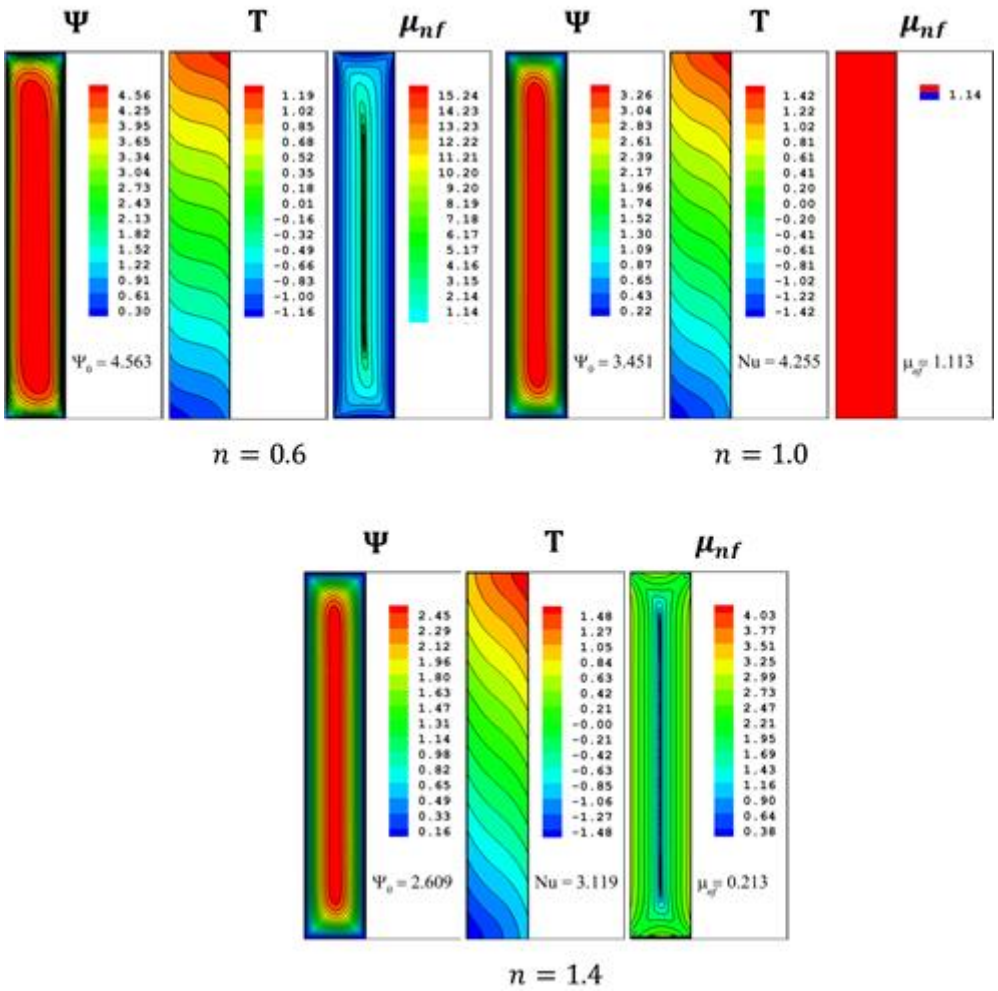



**Figure 5.1 :** Présentation respective des lignes de courant (Ψ), des isothermes ($T$) et la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) pour $R_T$ = 100, $\phi$ = 0.05 et Φ = 90° et différentes valeurs de $n$.

### V.1.2. Effet de Fraction volumique du nano-fluide ($\phi$) :

La figure 5.2 illustre les contours des lignes de courant (Ψ), les isothermes ($T$) et de la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) pour les valeurs $R_T$ = 100, n = 1,2 et Φ = 90°, et pour différentes valeurs de la fraction volumique ϕ. Les résultats indiquent qu'ajouter (5 %) de nanotubes de carbone au fluide de base (l'eau) entraîne une légère diminution de la viscosité apparente à l'intérieur de la cavité, par rapport à l'état sans ajout (0 %). En revanche, augmenter la fraction volumique à (10 %) conduit à une hausse notable de la viscosité apparente. Par ailleurs, il a été observé que toute augmentation du pourcentage de nanotubes de carbone dans le fluide de base contribue à renforcer à la fois l'intensité de l'écoulement et la température, ce qui est attribué à l'amélioration des propriétés thermiques du système, résultant de l'augmentation de la conductivité thermique due à l'ajout des nanotubes.

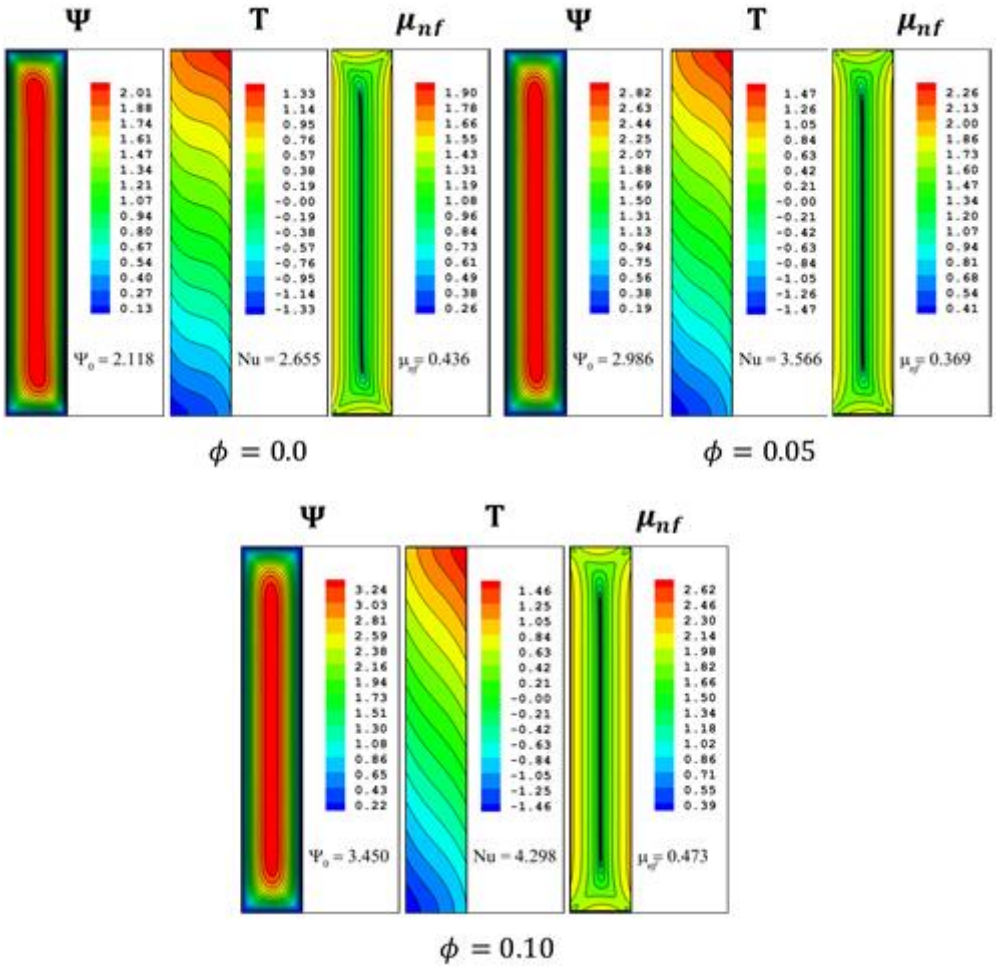



**Figure 5.2 :** Présentation respective les contours des lignes de courant (Ψ), les isothermes ($T$) et de la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) pour $R_T$ = 100, $n$ = 1.2, Φ = 90° et différentes valeurs de $\phi$.

### V.1.3. Effet d'Angle d'inclinaison (Φ) :

La figure 5.3 illustre les contours des lignes de courant (Ψ), les isothermes ($T$) et de la viscosité apparente ($\mu_{nf}$), pour $R_T$ = 100, ϕ = 0,05, $n$ = 0,8, et différentes valeurs de l'angle d'inclinaison Φ variant de 0° à 135°. À travers cette figure, il est facilement observé que l'augmentation de l'angle d'inclinaison entraîne une diminution de l'intensité de l'écoulement, avec une valeur maximale atteinte lorsque la cavité est en position horizontale (Φ = 0°).

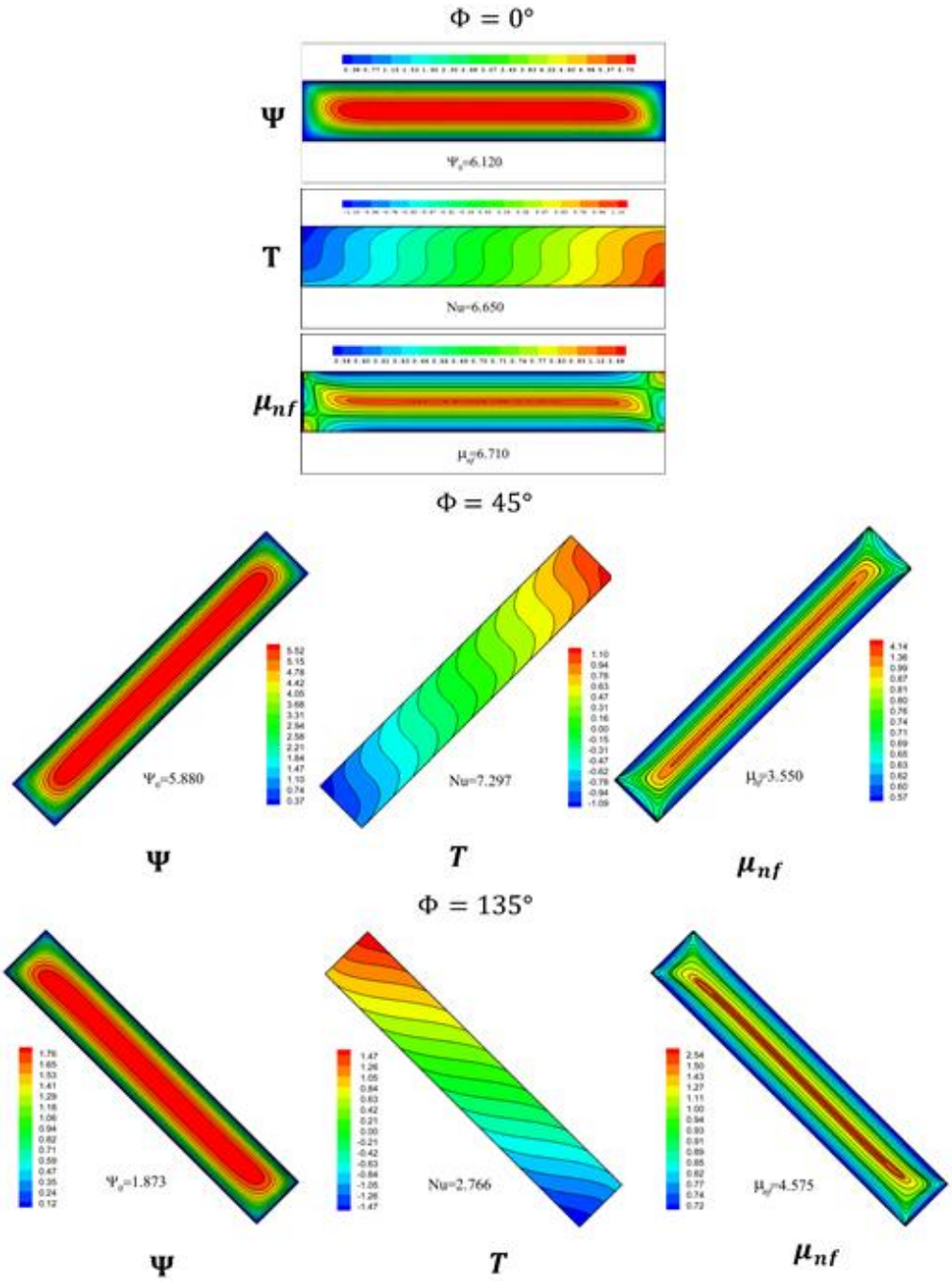



**Figure 5.3 :** Présentation respective des lignes de flux (Ψ), la température (T) et la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) pour $R_T$ = 100, $n$ = 0.8, ϕ = 0.05 et différentes valeurs de Φ

En ce qui concerne le gradient de température, une légère augmentation est remarquée lorsque l'angle d'inclinaison passe de 0° à 45°, moment où le nombre de Nusselt atteint sa valeur maximale, avant de chuter fortement à 135°. La viscosité apparente atteint sa valeur maximale en position horizontale, elle diminue de manière significative lors du passage de 0° à 45°, puis enregistre une légère augmentation à 135°.

## V.2. Effet des paramètres gouvernants sur les profils fonction de courant, température et viscosité :

### V.2.1. Effet de l'indice de loi de puissance (*n*) :

La figure 5.4 montre l'effet de l'indice de loi de puissance ($n$) sur l'intensité de l'écoulement ($\Psi$), la température (T), la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) à $0.6 < n < 1.4$, avec $R_T = 100$ et $\phi = 0.05$. Ces figures montrent que la solution semi-analytique asymptotique, représentée par des lignes pleines, concorde étroitement avec les résultats numériques indiqués par des cercles pleins. La figure 5.4 (a) montre que l'intensité de l'écoulement a une relation inverse avec l'indice de loi de puissance ($n$), elle atteint sa valeur maximale au centre de la cavité. Quant à la température (figure 5.4 (b)), elle améliore avec les valeurs croissantes de l'indice de loi de puissance ($n$). La figure 5.4 (c) montre que la valeur de $\mu_{nf}$ augmente de sa valeur minimale aux extrémités jusqu'à atteindre une valeur maximale au centre de la cavité pour les fluides non-newtoniens pseudo-plastiques ($n = 0.6$ et $n = 0.8$) et contrairement aux fluides dilatants ($n = 1.2$ et $n = 1.4$) elle diminue de sa valeur maximale aux extrémités jusqu'à atteindre une valeur minimale au centre de la cavité, et la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) prend une valeur constante pour les fluides newtoniens ($n = 1$).

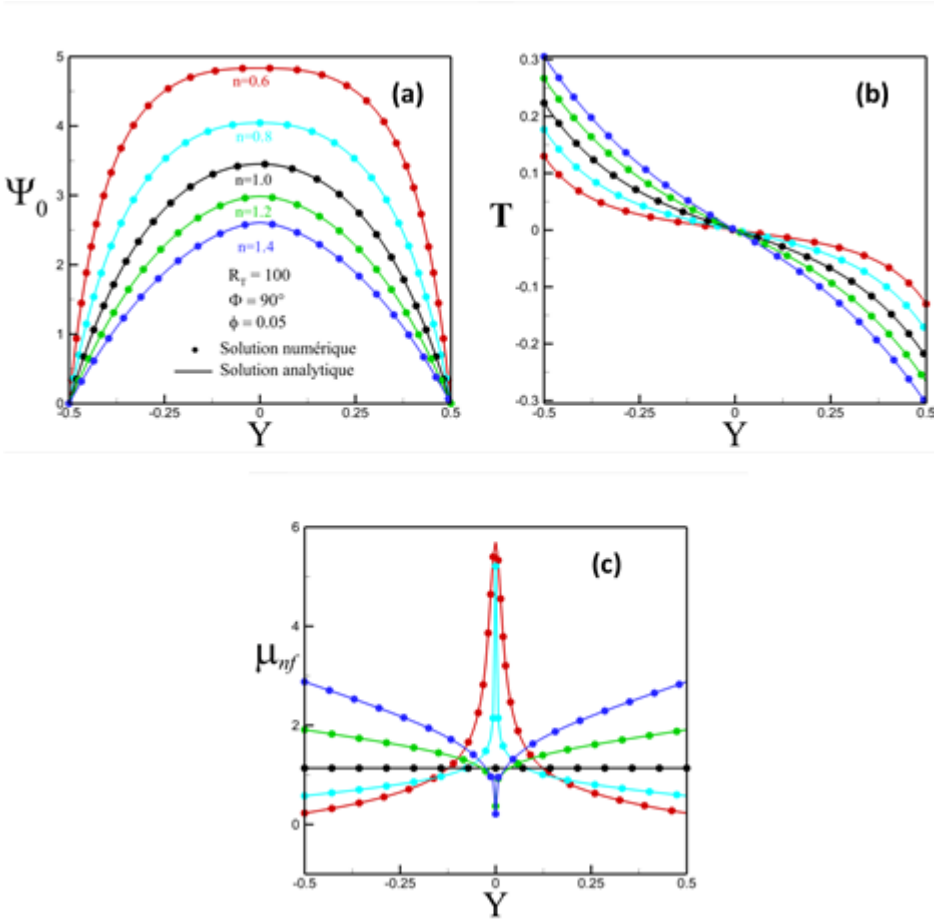



**Figure 5.4 :** Effet de l'indice de puissance ($n$) avec Φ = 90°, $R_T$ = 100 et $\phi$ = 0.05, sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ), (b) la température (T), (c) la viscosité apparente ($\mu_{nf}$).

### V.2.2. Effet de Fraction volumique du nano-fluide ($\phi$) :

Dans la figure 5.5, l'effet de la fraction volumique du nano-fluide $\phi$ sur l'intensité de l'écoulement (Ψ), la température (T) et la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) pour $n$ = 1.2, avec $R_T$ = 100 et Φ = 90°. Ces figures montrent que la solution semi-analytique asymptotique, représentée par des lignes pleines, concorde étroitement avec les résultats numériques indiqués par des cercles pleins. La figure 5.5(a) montrent que l'intensité de l'écoulement a une relation inverse avec la fraction volumique. La figure 5.5(b) montrent que la température s'améliore avec l'augmentation de valeurs de la fraction volumique. La figure 5.5(c) montre que la valeur de $\mu_{nf}$ est diminuée avec l'augmentation de valeurs de la fraction volumique ($\phi$). Du centre jusqu'à atteindre la valeur maximale sur les bords de la cavité.

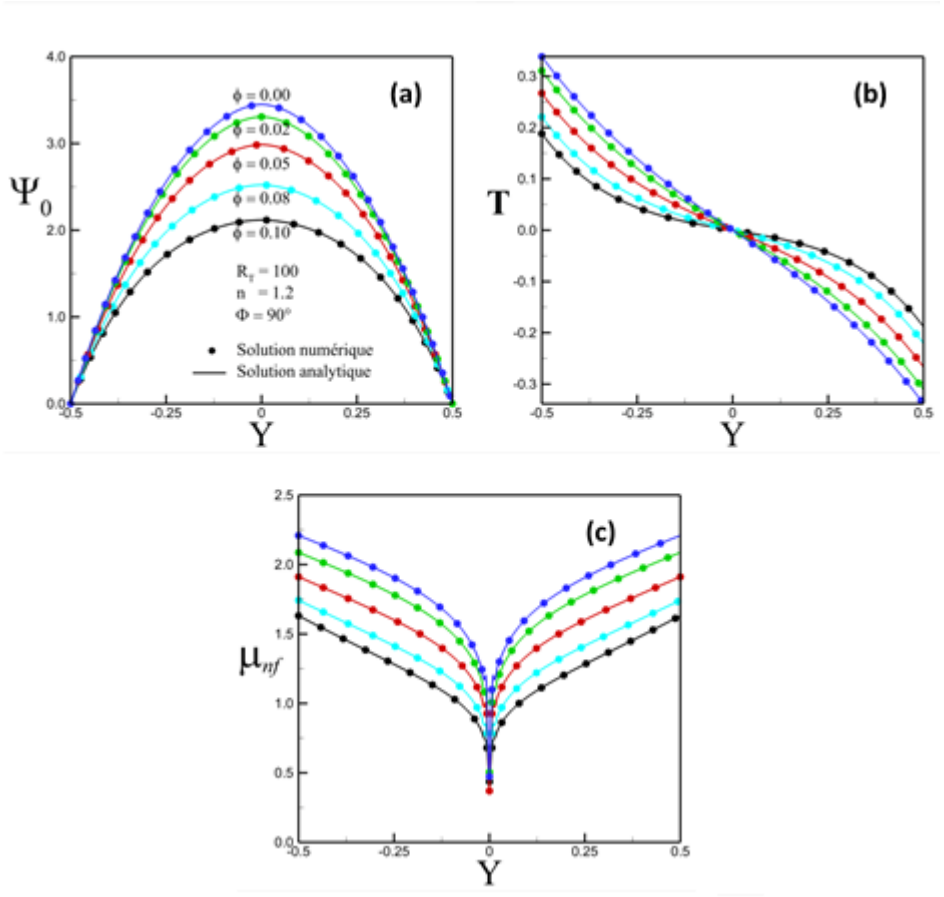



**Figure 5.5 :** Effet de fraction volumique ($\phi$) avec Φ = 90°, $R_T$ = 100 et Φ = 90°, sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ), (b) la température (T), (c) la viscosité apparente ($\mu_{nf}$).

### V.2.3 Effet d'Angle d'inclinaison (Φ) :

La figure 5.6 montre la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) et la température (T) pour des valeurs spécifiques de $R_T$ = 100, $n$ = 0.8, $\phi$ = 0.05 et des angles de pas variables Φ. La solution semi-analytique, représentée par des lignes pleines, concorde étroitement avec les résultats numériques, représentés par des cercles pleins, indiquant une concordance positive entre l'approche semi-analytique actuelle et la solution numérique. La figure 5.6 (a) montre que l'augmentation de l'angle d'inclinaison (Φ) entraîne une diminution de l'intensité de l'écoulement (Ψ) qui est à sa valeur maximale au centre de la cavité. Jusqu'à ce qu'il atteigne l'angle maximal Φ = 180° et que l'intensité de l'écoulement (Ψ) soit nulle. De plus, il convient de noter (La figure 5.6 (b)) que la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) est plus prononcée au centre de la cavité et sa valeur maximale est atteinte à Φ = 0°, et est absente sur les bords de la cavité. Dans la figure 5.6(c), il est montré que les profils de température montrent une croissance avec

l'augmentation de l'angle d'inclinaison Φ. De plus, à Φ = 180°, il présente un comportement de température linéaire en raison de l'absence de gradients de température.

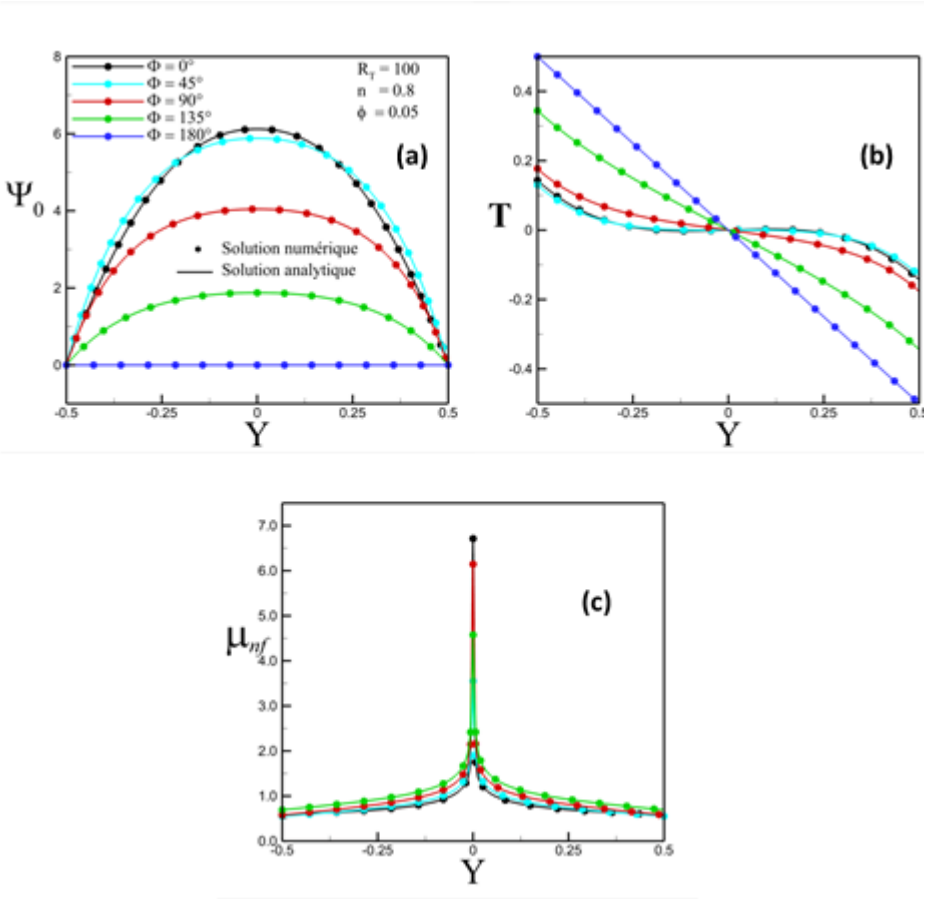



**Figure 5.6 :** Effet de l'angle d'inclinaison (Φ) avec $n = 0.8$, $R_T = 100$ et $\phi = 0.05$, sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ), (b) la température (T), (c) la viscosité apparente ($\mu_{nf}$).

### V.3. Effet des paramètres gouvernants et le nombre de Rayleigh ($R_T$) sur l'apparition de la convection :

#### V.3.1. Effet de l'indice de loi de puissance ($n$) et le nombre de Rayleigh ($R_T$) sur l'apparition de la convection :

La figure 5.7 montre l'intensité de l'écoulement (Ψ), Nombre de Nusselt ($Nu$) en fonction du nombre de Rayleigh ($R_T$) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ($n$) à $\phi = 0.05$, Φ = 90°. En général, on peut voir à partir des figures 5.7 (a) et (b) que le Intensité du flux (Ψ) et le nombre de Nusselt ($Nu$) augmentent avec la diminution de l'indice de loi de puissance ($n$). Pour ($R_T \leq 5$), la valeur de Ψ ne change pas quelle que soit la valeur de $n$, et il en va de même pour $Nu$.

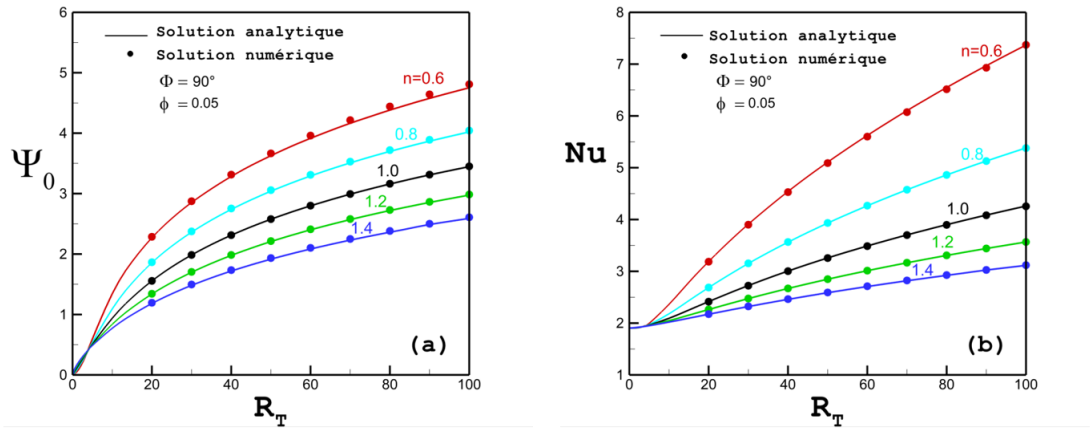



**Figure 5.7 :** Effets du nombre de Rayleigh ($R_T$) et de l'indice de puissance ($n$) sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ), et (b) les nombres de Nusselt ($Nu$).

### V.3.2. Effet de de Fraction volumique ($\phi$) et le nombre de Rayleigh ($R_T$) sur l'apparition de la convection :

La figure 5.8 montre l'évolution de l'intensité de l'écoulement (Ψ), Nombre de Nusselt ($Nu$) en fonction du nombre de Rayleigh $R_T$ avec différentes valeurs de fraction volumique $\phi$ et pour $n$ = 1.2 et Φ = 90°. Là l'intensité de l'écoulement (Ψ) (Fig. 5.8 (a)), et le nombre de Nusselt ($Nu$) (Fig. 5.8 (b)) augmentent proportionnellement à la valeur de $R_T$ et à la fraction volumique ($\phi$). Nous notons que lorsque (RT < 25) quelle que soit la valeur de $\phi$, Ψ est une approximativement valeur constante.

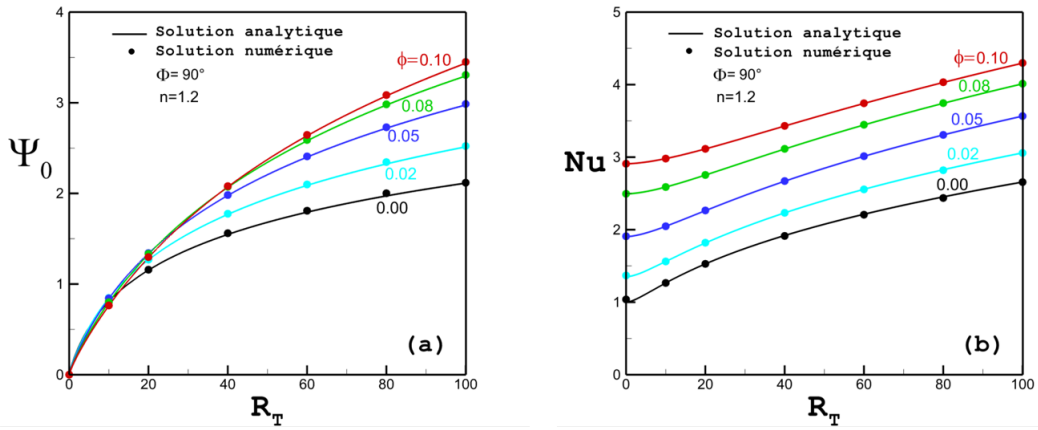



**Figure 5.8 :** Effets du nombre de Rayleigh ($R_T$) et de fraction volumique ($\phi$) sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ) et (b) les nombres de Nusselt ($Nu$).

### V.3.3. Effet de Fraction volumique ($\phi$) et l'indice de loi de puissance ($n$) sur l'apparition de la convection :

La figure 5.9 montre les variations de l'intensité de l'écoulement (Ψ), Nombre de Nusselt ($Nu$) avec fraction volumique ($\phi$) et différentes valeurs de l'indice de loi de puissance ($n$) à $R_T$= 100 et Φ = 90°. Pour une valeur donnée de l'indice de loi de puissance ($n$), l'augmentation de la fraction volumique ($\phi$) conduit à une augmentation de l'intensité de l'écoulement (Ψ) et du nombre de Nusselt ($Nu$). Quelle que soit la valeur de $\phi$, toute augmentation de l'indice de loi de puissance ($n$) entraîne une diminution à la fois de l'intensité de l'écoulement (Ψ) et du nombre de Nusselt ($Nu$).

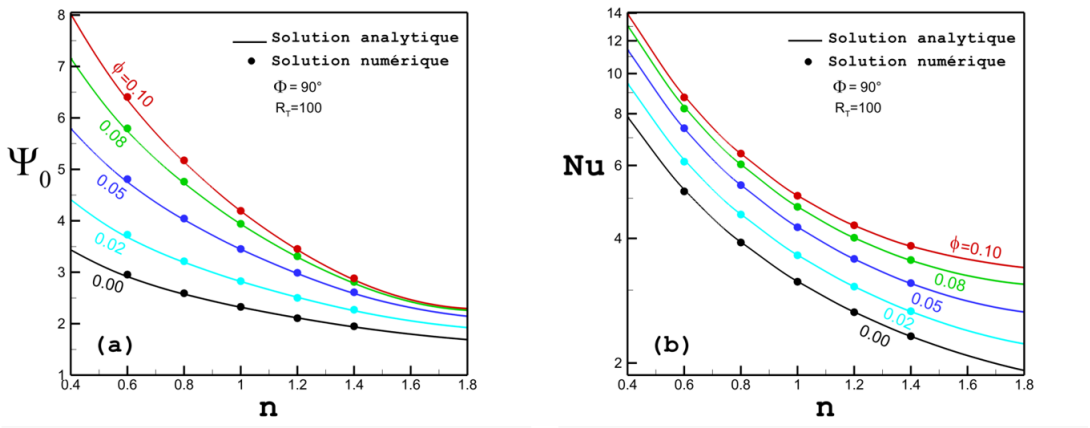



**Figure 5.9 :** Effets du nombre de l'indice de loi de puissance ($n$) et de fraction volumique ($\phi$) sur (a) l'intensité de l'écoulement (Ψ) et (b) les nombres de Nusselt ($Nu$).

### V.3.4. Effet d'Angle d'inclinaison (Φ) et l'indice de loi de puissance ($n$) sur l'apparition de la convection :

Les figures 5.10 (a) et (b) illustrent les effets de l'angle incliné (Φ) et de l'indice de loi de puissance ($n$) sur l'intensité de l'écoulement (Ψ) et le taux de transfert de chaleur ($Nu$), respectivement, à des valeurs de $R_T$ = 100 et ϕ = 0.05. Les résultats ont été obtenus pour des valeurs de l'indice de loi de puissance ($n$) comprises entre 0,6 et 1,4. Dans le graphique, les lignes pleines correspondant aux valeurs positives (négatives) de $C_T$ indiquent les solutions naturelles (antinaturelles), tandis que les lignes en tiret-point-point représentent les solutions instables. Il ressort clairement des figures 5.10 (a) et (b) qu'à un angle incliné donné (Φ), l'intensité de l'écoulement (Ψ), et le transfert de chaleur résultant ($Nu$), diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance ($n$).

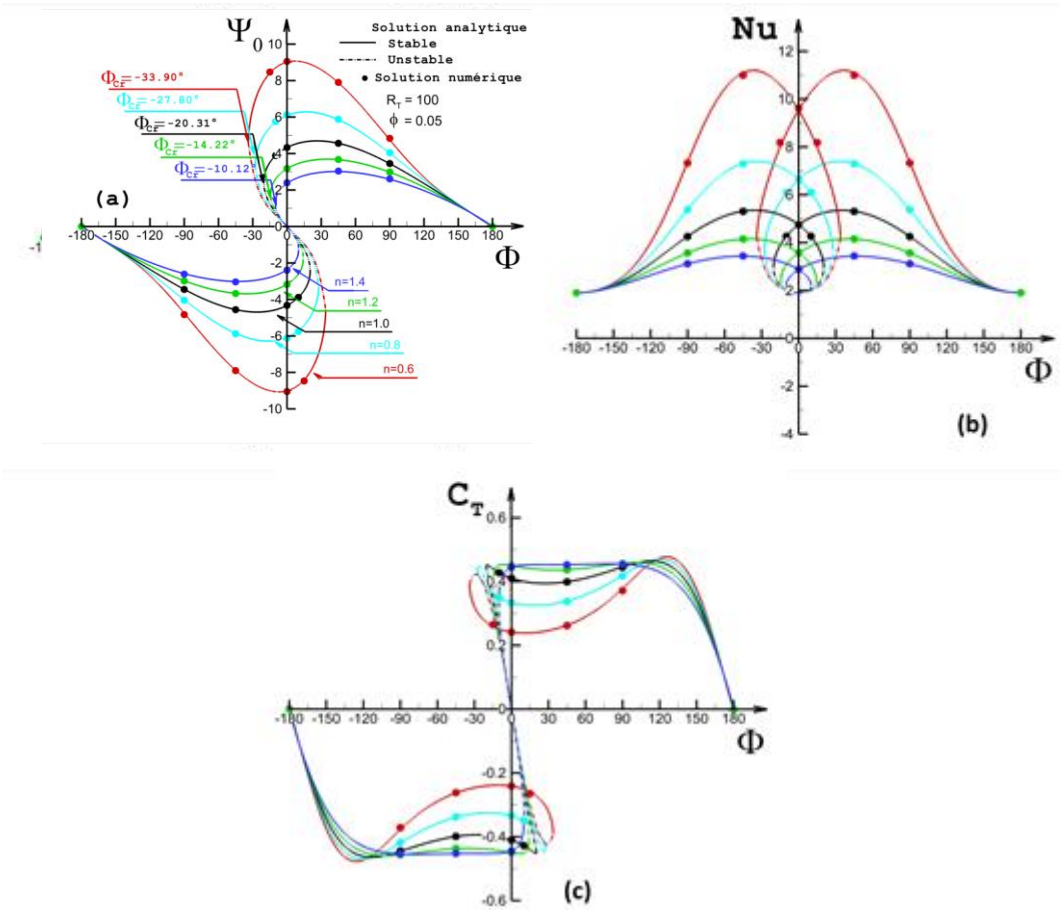



**Figure 5.10 :** Effet dû *n*, et de Φ, sur : (a) la fonction de courant au centre de la cavité, (b) le nombre de Nusselt $Nu$, et (c) le gradient de température $C_T$ pour $R_T = 100$ et $\phi = 0.05$.

La figure 5.10 (c) présente les valeurs de $C_T$, représentant le gradient de température constant dans la direction *x*, pour $R_T = 100$ et $\phi = 0.05$, tracées en fonction de l'angle d'inclinaison (Φ), et de l'indice de loi de puissance (*n*). Les graphiques démontrent clairement que, pour un angle d'inclinaison (Φ) fixé, le gradient de température constant $C_T$ diminue de manière cohérente avec la diminution de l'indice de loi de puissance (*n*). Finalement, il est noté que l'indice de loi de puissance (*n*) influence également l'intervalle dans lequel apparaissent plusieurs solutions. Ainsi, la figure 5.10 illustre que, pour une valeur donnée de l'indice de loi de puissance (*n*), plusieurs états stationnaires sont possibles dans l'intervalle $-\Phi_{CR} < \Phi < \Phi_{CR}$.

# CONCLUSION GENERALE

Ce mémoire présente une étude numérique et analytique de la convection naturelle dans une couche poreuse rectangulaire inclinée saturée par un nano-fluide non newtonien. Le système est soumis à des conditions aux limites thermiques impliquant des flux de chaleur constants ainsi que des températures imposées.

Un modèle mathématique a été élaboré pour décrire les phénomènes d'écoulement convectif et de transfert thermique. Pour traiter ce problème, deux approches différentes ont été adoptées pour résoudre les équations résultantes de manière complète. Tout d'abord, des solutions analytiques ont été dérivées en utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle. Ensuite, une méthode numérique basée sur le schéma des différences finies a été utilisée, où le système a été discrétisé selon la méthode implicite des directions alternées (ADI). La méthode de sur-relaxation successive (SOR) a également été utilisée pour résoudre l'équation de la fonction de courant. Chacune des équations fondamentales linéarisées a été résolue numériquement par la méthode des éléments finis.

Le mémoire examine en détail l'effet de chaque paramètre du problème, notamment le nombre de Rayleigh ($R_T$), l'indice de loi de puissance ($n$), l'angle d'inclinaison ($\Phi$) et la fraction volumique du nano-fluide ($\phi$).

Les principaux résultats obtenus sont présentés comme suit :

**Effet de l'indice de loi de puissance (n) :**

- L'intensité de l'écoulement ($\Psi$) est inversement proportionnelle à l'indice de loi de puissance (n), tandis que la température s'améliore avec l'augmentation de cet indice. En ce qui concerne la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) dans la cavité, elle augmente avec l'accroissement de l'indice ($n$) et diminue avec sa réduction. Elle reste constante dans toute la cavité lorsque $n = 1$.
- L'intensité de l'écoulement ($\Psi$) ainsi que le nombre de Nusselt ($Nu$) sont inversement liés à l'indice de loi de puissance ($n$), quelle que soit la valeur du nombre de Rayleigh ($R_T$), de la fraction volumique ($\phi$) ou de l'angle d'inclinaison ($\Phi$).
- Le gradient thermique constant $C_T$ évolue de manière cohérente avec l'indice de loi de puissance ($n$).

**Effet de la fraction volumique ($\phi$) :**

- L'intensité de l'écoulement (Ψ) et la viscosité apparente ($\mu_{nf}$) (au centre de la cavité) sont inversement proportionnelles à la fraction volumique ($\phi$). En revanche, la température s'améliore avec l'augmentation des valeurs de la fraction volumique ($\phi$).
- On observe une relation directe entre l'intensité de l'écoulement (Ψ) et le nombre de Nusselt ($Nu$) avec la fraction volumique ($\phi$) lorsqu'ils sont représentés en fonction du nombre de Rayleigh ($R_T$), ainsi qu'en fonction de l'indice de loi de puissance (n).

**Effet de l'angle d'inclinaison (Φ) :**

- L'augmentation de l'angle d'inclinaison (Φ) entraîne une diminution de l'intensité de l'écoulement (Ψ), de la viscosité apparente (au centre de la cavité), ainsi que du nombre de Nusselt ($Nu$).
- L'angle de 0° permet d'atteindre les valeurs maximales de l'intensité de l'écoulement (Ψ) et de viscosité apparente (μnf), tandis que pour le nombre de Nusselt ($Nu$), c'est l'angle de 45° qui permet d'obtenir la valeur maximale.

REFERENCE

[1] Tiwari, Raj Kamal, and Manab Kumar Das. "Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids." International Journal of heat and Mass transfer 50.9-10 (2007).

[2] Chhabra, Raj P., and John Francis Richardson. Non-Newtonian flow and applied rheology: engineering applications. Butterworth-Heinemann, 2011.

[3] Nield, Donald A., and Adrian Bejan. Convection in porous media. Vol. 3. New York: springer, 2006.

[4] Buongiorno, Jacopo. "Convective transport in nanofluids." (2006): 240-250.

[5] Sheremet, Mikhail A., et al. "MHD free convection in a wavy open porous tall cavity filled with nanofluids under an effect of corner heater." International Journal of Heat and Mass Transfer 103 (2016): 955-964.

[6] LAIDOUDI, Houssem. Étude des écoulements non-newtonien autour des obstacles confinés. Diss. Université Mohamed Boudiaf des Sciences et de la Technologie-Mohamed Boudiaf d'Oran. (2017).

[7] Bird, R. Byron, Warren E. Stewai, and Edwin N. Lightfoot. "Phenomena Second Edition." (2002).

[8] KREITH. F, «Mechanical Engineering Handbook», CRC Press LLC, (1999).

[9] BEN AZOUZ AHMED. K « Relations entre propriétés rhéologiques et structure microscopique de dispersions de particules d'argile dans des solutions de polymères », Thèse de Doctorat, Université de Haute Alsace, (2010).

[10] KHALI. S, « Analyse de la convection mixte dans une conduite annulaire poreuse en présence d'un fluide non-newtonien», Thèse de Magister, Université de houari Boumediene, (2007).

[11] RODRÍGUEZ DE CASTRO. A «Flow experiments of yield stress fluids in porous media as a new porosimetry method», Thèse de Doctorat, École doctorale Sciences des métiers de l'ingénieur (Paris), (2014).

[12] KAMLA. Y, «Etude de l'écoulement d'un fluide non newtonien dans une cuve mécaniquement agitée par une Turbine de Rushton », Thèse de Magister, Université d'Oran Mohamed Boudiaf, (2011).

[13] NADERI. P, « Etudes numériques et analytiques des instabilités dues à la convection mixte d'un fluide viscoélastique saturant une couche poreuse chauffée par le bas », Thèse de Doctorat, Université de Picardie Jules Verne, (2019).

[14] BELMOULOUD. A, OUARET. K, «Effet de la température sur l'irréversibilité lors de l'écoulement de deux films non-newtonien sur un plan incliné », Mémoire de Master, Université de Abdelhafid Boussouf, (2023).

[15] CHHABRA. R.P, RICHARDSON. J.F, « Écoulement non newtonien dans les industries de transformation. Principes fondamentaux et applications techniques », (1999).

[16] Site web : https://blog.rheosense.com/non-newtonian-fluid-modeling-power-law-model, Vu dans : 07/03/2025, 17:48.

[17] LOUNIS. S, « Étude de la Convection Thermo-solutale dans un Milieu Confiné Saturé par un Polluant de Type Non-Newtonien », Thèse de Doctorat, Université Yahia Farés, (2023).

[18] OULD LARBI. A, « Effet du Comportement Rhéologique des Fluides non-Newtoniens sur la Convection Naturelle dans une Couche Poreuse », Thèse de Doctorat, Université Yahia Farés, (2024).

[19] TALBI. El, « Etude numérique de la convection autour des composants électroniques montés entre deux plaques planes verticales en présence d'un nano-fluide », Mémoire de Master, Université de Biskra, (2016).

[20] GLADES. B, « Contribution à l'étude de la convection naturelle dans les nano-fluides en configuration de Rayleigh-Bénard », Thèse de Doctorat, Université de Toulouse, (2010).

[21] MAOUASSI. A, « Intensification des échanges de chaleur par l'utilisation des nano fluides», Thèse de Magister, Université M'Hamed Bougara, (2012).

[22] BAAMEUR. W, BOUTICHE. S, « Etude de la convection naturelle d'un nano-fluide dans une cavité ondulée avec milieux poreux », Mémoire de Master, Université Ibn Khaldoun, (2022).

[23] AISSA. F, LAMOURI. I, « Simulation numérique de la convection mixte d'un nano-fluide dans un canal Vertical », Mémoire de Master, Université Ibn Khaldoun, (2020).

[24] KALFALI. M, « Etude de la convection thermique dans des cavités par l'utilisation des nano- fluides hybrides », Mémoire de Master, Université Mohamed Khider, (2021).

[25] Site web : https://etigo.nagaokaut.ac.jp/suematsu/pwd.html, Vu dans : 10/03/2025, 00:01.

[26] SALHI. H, « étude numérique de la convection naturelle dans les enceintes : nano-fluide», Thèse de Doctorat, Université Batna, (2010).

[27] SOUFI. H, « application des nano-fluides pour le refroidissement : étude d'un cas d'une géométrie simple », Mémoire de Master Académique, Université Kasdi Merbah, (2023).

[28] François. N, « Étude numérique du comportement d'un nano-fluide (eau-A1203) en écoulement turbulent entre deux disques coaxiaux et parallèles », Mémoire de Master Académique, Université de Moncton, (2010).

[29] KHENTOUL. M, « Etude numérique de la convection mixte dans un canal horizontal contenant des ailettes », Thèse de Doctorat, Université des frères Mentouri, (2016).

[30] RAMDANE. Y « Simulation numérique du transfert de chaleur et de masse en milieux fluides et poreux », Thèse de Doctorat, Université de Houari Boumediene, (2002).

[31] DELACHE. A, « Etude analytique et numérique des instabilités spation tempérées des écoulements de convection mixtes en milieux poreux : comparaison avec l'expérience», Thèse de Doctorat, l'Université des Sciences et Technologie de Lille, (2005).

[32] RAHLI. O, « Convection naturelle thermo-solutale dans cavité divisée par une cloison poreuse », Thèse de Magister, Université de houari Boumediene, (2003).

[33] SALAMA. S « Ecoulement avec convection thermique à travers un milieu poreux multicouche », Thèse de Magister, Université de houari Boumediene, (2007).

[34] N.SASSANE. « Modélisation du transfert de chaleur lors de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'une paroi poreuse ». Thèse de Magister, Université 20 Août 55, (2008).

[35] MESSAOUDI. D, HORR. S, « Contribution à la méthode de convection naturelle dans l'eau », Mémoire de Master, Université Kasdi Merbah, (2015).

[36] Damene. D, « Effet de la variation de perméabilité dans un milieu poreux en convection naturelle », Thèse de Doctorat, Université KASDI MARBEH, (2022).

[37] ZIDI. M, SALAH. N, « L'effet de la forme géométrique du milieu poreux sur le refroidissement des composants électroniques par des nano fluides », Mémoire de Master, Université Mohamed Khider, (2024).

[38] Groşan, T., et al. "Free convection heat transfer in a square cavity filled with a porous medium saturated by a nanofluid." International Journal of Heat and Mass Transfer 87 (2015): 36-41.

[39] KHIR. S, REBHI. R, KEZRANE. M, BORJINI. M.N, « Bifurcation d'hystérèsis et de bistabilité induite par l'épaississement par cisaillement et la convection double-diffusive combinés dans des enceintes poreuses peu profondes remplies de fluides de loi de puissance non newtoniens », East European Journal of Physics, (2024).

[40] KHIR. S, HENNICHE. R, REBHI. R, DIDI. F, KEZRANE. M, « Bi-Stability Analysis of Double Diffusive Convection in a Tilted Square Porous Cavity Filled With a Non-Newtonian Power-Law Fluids », Nanotechnology Perceptions, (2024).

[41] LOUNIS. S, REBHI. R, HADIDI. N, LORENZINI. G, MENNI. Y, OUARI. A, AZWADI CHE SIDIK. N, « Thermo-Solutal Convection of Carreau-Yasuda Non-Newtonian Fluids in Inclined Square Cavities under Dufour and Soret Impacts », CFD Letters, (2022).

[42] OULD LARBI. A, REBHI. R, RAHAL. S, LORENZINI. G, LAIDI. M, MENNI. Y, HIJAZ. A, « Impact of Non-Newtonian Fluids' Rheological Behavior on Double Diffusive Natural Convection in an Inclined Square Porous Layer », Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences, (2022).

[43] AZIZOU. M, KHIR. S, ZIRARI. M, BOUAZIZ. M.N, REBHI. R, « Heat Transfer by Non-Newtonian-Based SWCNT-Nano fluids in the Presence of MHD », Letters in High Energy Physics, (2025).

[44] REBHI. R, MAMOU. M, HADIDI. N, « Onset of Linear and Nonlinear Thermosolutal Convection with Soret and Dufour Effects in a Porous Collector under a Uniform Magnetic Field », MDPI journal, (2021).

[45] TIWARI. R.K, DAS. M.K, « Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nano-fluids », International Journal of Heat and Mass Transfer, (2006).

[46] Xue. Q.Z, « Model for thermal conductivity of carbon nanotube-based composites », Physica B, (2005).

[47] Xue. Q.Z, Kefayati. G. R, « Simulation of heat transfer and entropy generation of MHD natural convection of non-Newtonian nano fluid in an enclosure », International Journal of Heat and Mass Transfer, (2016).

[48] SAPNA. J, BHARGAVA. R, « Numerical simulation of free convection of MHD non-Newtonian nano fluid within a square wavy enclosure using Meshfree method », International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, (2020).

[49] PASCAL. H, « Rheological behaviour effect of non-newtonian fluids on steady and unsteady flow through a porous medium », International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, (1983).

[50] PASCAL. H, « Rheological effects of non-newtonian behavior of displacing fluids on stability of a moving interface in radial oil displacement mechanism in porous media », International Journal of Engineering Science, (1986).

[51] SEN. M, VASSEUR. P, ROBILLARD. L, « Multiple steady states for unicellular natural convection in an inclined porous layer », International Journal of Heat and Mass Transfer, (1987).

[52] MAMOU. M, BILGEN. E, GOBIN. D, VASSEUR. P, « Double-diffusive convection in an inclined slot filled with porous medium », European journal of mechanics, (1995).

[53] JOLY. E, VASSEUR. P, LABROSSE. G, « Soret instability in a vertical brinkman porous enclosure », Numerical Heat Transfer, (2001).

[54] PEACEMAN. D. W, RACHFORD, JR. H.H, « The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations », Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, (1955).

[55] FRANKEL. S.P, « Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations », Mathematics of Computation, (1950).