République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Département des Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

Halouane Salah

Opérateurs de Toeplitz et Polynômes Orthogonaux

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

****

Président :	Dr. AYADI Hocine	$M.C.A$	Université de Médéa
Examinateur :	Dr. BENTERKI Abdessalem	$M.C.B$	Université de Médéa
Encadreur :	Dr. TOUMACHE Kamel	$M.C.B$	Université de Médéa

Année universitaire : 2022-2023

Table des matières

Remeciements **II**

Dédicace **IV**

Notations **V**

Introduction **1**

1 Préliménaires **2**
1.1 Espace de Hardy 2
1.2 Espace de Bergman 5
1.3 Matrice d'un opérateur 7
1.4 Matrice et opérateur de Laurent 8

2 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy et sur l'espace de Bergman. **13**
2.1 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy 13
2.2 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman 19
2.3 Opérateur de Toeplitz à symbole quasi homogène ou radial 21

3 Polynomes Orthogonaux **24**
3.1 Polynomes Orthogonaux 24
3.2 Les Polynomes de Legendre 26
3.3 Lien entre les Polynomes de Legendre et l'opérateur de Toeplitz 31

Bibliographie. **33**

Remerciement

Je remercie **Dieu** pour ses grandes bénédictions dans ma vie. Je le remercie pour la santé et le bien-être qu'il me donne, ainsi que pour les êtres chers et les amis qui me soutiennent et m'aiment.

Je le remercie pour la nourriture qui me procure force et énergie chaque jour, ainsi que pour le logement qui me procure protection et confort. Je le remercie pour la nature magnifique, le ciel bleu et le soleil éclatant qui apportent joie et éclat à ma vie.

Je le remercie pour les opportunités qu'il me donne d'apprendre et de grandir, ainsi que pour les conseils et la sagesse qu'il me guide. Je le remercie pour la vie elle-même et pour chaque instant que je vis. Je remercie le Seigneur avec gratitude et reconnaissance, et je le prie de me donner plus de force et de sagesse pour continuer à le servir et à faire le bien aux autres. Amen.

Je voudrais également remercier le professeur K.TOUMACHE pour son aide précieuse dans mon mémoire. Sa contribution a été inestimable et sa volonté de m'assister a été très appréciée.

Il a fait preuve d'une grande disponibilité et a consacré du temps pour me guider dans mon travail. Grâce à ses conseils éclairés, j'ai pu améliorer la qualité de mon mémoire et progresser dans ma recherche.

Je suis profondément reconnaissant envers lui et je le remercie chaleureusement pour son soutien. Son expertise et son engagement ont été d'une grande valeur pour moi. Je lui souhaite tout le succès et la satisfaction dans ses futurs projets.

Je le remercie infiniment, car il a été d'une grande gentillesse et générosité en m'aidant dans mon mémoire. Il m'a apporté le soutien nécessaire et a fait preuve d'une compréhension et d'une patience remarquables dans toutes les situations. Sa contribution a été extrêmement précieuse et a eu un impact significatif sur la qualité et le succès de mon mémoire.

Je suis profondément reconnaissant envers lui, et je suis fier de sa générosité et de son dévouement à m'aider. Je le remercie humblement et je lui souhaite tout le succès et le bonheur dans sa vie personnelle et professionnelle.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'**Université Yahia Farès de Médea** en particulier l'équipe de travail de la **Département des Mathématiques et de l'Informatique** qui a contribué à notre formation, que ce soit le personnel administratif ou

pédagogique.

Dédicace

A mes chers parents

Quoi que je dise ou que je fasse,
je n'arrivai jamais à vous remercier comme il se doit.
C'est grâce à vos encouragements,
vos bienveillances et votre présence à mes côtés,
que j'ai réussi ce respectueux parcours.
Je souhaite que vous soyez fière de moi,
et que j'ai pu répondre aux espoirs que vous avez fondé en moi.

A mes chers frères

Merci pour vos soutiens moral,
vos confiances et vos conseils précieux,
qui m'ont aidé dans les moments difficiles.
Je vous souhaite le bonheur et la réussite dans vos vies.

A toute ma famille et mes amis

A travers ces lignes,
j'adresse mes sincères remerciements
à tous les collègues qui m'ont aidé de près ou de loin.
Un dédicace spécial pour les étudiants
en ***Analyse Mathématique et Applications, 2023***
sur l'esprit joyeux et l'harmonie régnant dans le groupe,
et l'échange d'informations et d'idées,
qui ont contribué au succès de chacun et bonne chance à tous
et à la fin, le seul mot que je puisse dire est merci ,
merci beaucoup à tous ceux qui ont contribué,
à la réalisation de ce mémoire.

Notations

$\mathbb{C}$	le plan complexe.
$\mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.
$\mathbb{T}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$.
$d\mu(z)$	$\frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité $\mathbb{T}$.
$\widehat{f}(n)$	le n-ième coefficient de Fourier de f.
$H^p(\mathbb{T})$	$\simeq H^p(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy.
$\mathscr{H}(\mathbb{D})$	l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$.
$\mathscr{H}^\infty(\mathbb{D})$	l'espace des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{D}$.
$dA(z)$	$= \frac{1}{\pi} r\,dr\,d\theta$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$.
$L^p(\mathbb{T}, d\mu)$	l'espace des fonctions p-intégrables sur $\mathbb{T}$ par rapport à la mesure $d\mu$.
$L^p(\mathbb{D}, dA)$	l'espace des fonctions p-intégrables sur $\mathbb{D}$ par rapport à la mesure $dA(z)$.
$\lVert f\rVert_p$	$= (\int_{\mathbb{D}} \lvert f(z)\rvert^p\, dA(z))^{\frac{1}{p}}$ la norme sur $L^p(\mathbb{D}, dA)$.
$< f, g >$	$= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, dA(z)$ le produit scalaire sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{D}, dA)$
$L^p_a(\mathbb{D}, dA)$	l'espace de Bergman.
P_+	la projection orthogonale.
M_ϕ	l'opérateur de Laurent (de multiplication).
$\mathscr{P}$	l'ensemble des polynômes.
T_φ	l'opérateur de Toeplitz à symbole φ.
$\hat{\varphi}_r$	la fonction moyenne de φ.
$\mathscr{A}(D)$	$= \{f : D \to \mathbb{C}, f \ \textit{analytique}\}$

Introduction

La théorie des Opérateurs de Toeplitz c'est apparue dans le début du vent-ème siècle dans l'article d'Otto Toeplitz de 1911 "Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvie-len Veriinderlichen. J. Teil : Theorie des L- Formen 5 (Math. Annalen, 70 (1911),351-376), qui contient une théorie spectrale des formes de Toeplitz (Tp, p) et des opérateurs de Laurent $L = (t_{i-j})_{i,j\in Z}$ dans l'espace $l^2(\mathbb{Z}) =: \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} : x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|x_j\right|^2 = \|x\|^2 < +\infty\}$, .

L'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman (l'espace des fonctions analytiques, p-intégrables sur le disque du plan complexe) a commencé dans les années 1980.

Des résultats sur le produit des opérateurs, la caractérisation des opérateurs bornés, les opérateurs compacts ainsi que la classe de Schatten(classe des operateurs p-compact) ont étés obtenus.

Ce mémoire est consacré à l'étude de lien entre les opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman (en particulier les opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène ou radial), en passant à la définition et quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy et sur l'espace de Bergman.

Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires sur les deux espaces de Hardy et de Bergman, le deuxième sur la définition de l'opérateur de Toeplitz et quelques propriétés sur les deux espaces.

En fin, et dans le troisième chapitre, on expose les polynômes orthogonaux (en particulier les polynômes de Legendre) et quelques propriétés sur ces polynômes, et on donne le lien entre l'opérateue de Toeplitz à symbole radial sur l'espace de Bergman et les polynômes de Legendre.

CHAPITRE 1

Préliménaires

1.1 Espace de Hardy

Définition 1.1. *On considère le plan complexe* $\mathbb{C}$. *Soit* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *le disque unité ouvert de* $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *le cercle unité de* $\mathbb{C}$, *la mesure de Lebesgue normalisée* μ *sur le cercle unité* $\mathbb{T}$ *est définie par :* $d\mu(z) = \frac{d\theta}{2\pi}$, *pour* $1 \leq p < +\infty$. *On note par* $L^p(\mathbb{T}, d\mu)$ *l'espace de Lebesgue usuel*

$$L^p(\mathbb{T}, d\mu) = \{f : \|f\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^p d\mu(z) < +\infty\},$$

et

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \{f : \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \sup_{|z|=1} |f(z)| < +\infty\}.$$

Pour $f \in L^p(\mathbb{T}, d\mu), 1 \leq p \leq +\infty$ nous notons

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{z}^n d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{t\theta})e^{-in\theta} d\theta, n \in \mathbb{Z},$$

le n-ième coefficient de Fourier de f.

On note par $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, et par $\mathscr{H}^\infty(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions analytiques bornées dans $\mathbb{D}$. On définit les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ par

$$H^p(\mathbb{T}) = \left\{f \in L^p(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, \text{ pour tout } n < 0\right\}; \ 1 \leq p \leq \infty,$$

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}), \sup_{0<r<1} \left\|f_r\right\|_{L^p(\mathbb{T})} < \infty\right\}; \ 1 \leq p \leq \infty,$$

où $f_r(z)=f(rz)$ pour $|z|<\frac{1}{r}$.

D'après de Fatou et de Riesz ($voir$[6]) montrent que pour $1\leq p<\infty$ les espaces $H^p(\mathbb{T})$, $H^p(\mathbb{D})$ sont isomorphes, $\forall f\in H^p(\mathbb{D})$, il existe $bf\in H^p(\mathbb{T})$, telle que :

$$f_r(\xi)=(bf)*P_r(\xi)=\sum_{n\geq 0}a_n r^n\xi^n, \forall \xi\in\mathbb{T},$$

et

$$\lim_{r\to 1^-}\left\|f_r\mid_{\mathbb{T}}-bf\right\|=0, \text{ si } 1\leq p<\infty,$$

$$\lim_{r\to 1^-}\left\|f_r\mid_{\mathbb{T}}-bf\right\|=0, \text{ si } 1\leq p<\infty,$$

où P_r le noyau de Poisson donné par la fonction suivante :

$$P_r(x)=P(re^{ix})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{|1-re^{ix}|^2}, \text{ pour } 0\leq r<1, \text{ et } x \text{ ré el},$$

et

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-y)g(y)dy, \quad \forall x\in(0,2\pi), \quad \text{(la convolution de } f \text{ et } g).$$

Pour $p=\infty$ la limite est faible* pour la topologie-faible* $\sigma(L^\infty,L^1)$. L'application $f\to bf$ est donc une bijection isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$. Ainsi, lorsque $f\in H^p(\mathbb{D})$, nous pouvons voir f comme une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ et aussi comme une fonction dans $H^p(\mathbb{T})$.

Dans la suite, nous identifions $f\in H^p(\mathbb{D})$ et sa limite $bf\in H^p(\mathbb{T})$ par

$$f_r=f*P_r, \quad f=\sum_{n\geq 0}\widehat{f}(n)z^n.$$

Proposition 1.1. *Soient $z\in\mathbb{D}$, et $f:H^p(\mathbb{D})\to\mathbb{C}$. L'évaluation ponctuelle $f\mapsto f(z)$ dans $\mathbb{D}$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $H^1(\mathbb{D})$ (et par cons équent sur $H^p(\mathbb{D})$, $1\leq p\leq\infty$).*

Démonstration. Si $z=re^{i\theta}, 0\leq r<1$, on a

$$\left|f(z)\right|=\left|f(re^{i\theta})\right|=\left|f*P_r(e^{i\theta})\right|\leq\left\|f\right\|_2\|P_r\|_\infty\leq\left\|f\right\|_2\frac{1+r}{1-r}.$$

□

On a d'après la proposition précédente que

$$\left|f(z)\right|\leq\left\|f\right\|_2\frac{2}{1-|z|}$$

ceci implique que si K est un compact de $\mathbb{D}$ et $(f_n)_n$ est une suite d'éléments de $H^2(\mathbb{D})$ qui

converge vers f pour la norme $\|.\|_2$ alors

$$\sup|f(z)-f_n(z)| \leq \sup_{z\in k}\frac{2}{1-|z|}$$

Comme $\sup_{z\in k}\frac{1}{1-|z|}=\frac{1}{d(K,\mathbb{T})}<\infty$

la topologie induite par $\|.\|_2$ sur $H^2(\mathbb{D})$ est plus forte que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, l'espace $H^2(\mathbb{D})$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{D})$, en particulier la projéction orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ sur $H^2(\mathbb{D})$ est bien définie par la formulation intégrable,On la note par P_+

Le produit scalaire de $H^2(\mathbb{D})$ est donc induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$, et défini par :

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}d\mu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n},\end{aligned}$$

pour $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ et $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$.

En plus la famille $(e_n(z))_{n\geq 0}=(z^n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $H^2(\mathbb{D})$, le théoréme de Riesz (voir [14]), montre alors que $H^2(\mathbb{D})$ possède un noyau reproduisant appelé le noyau de Cauchy K_z tel que $f(z)=\langle f,K_z\rangle$, pour tout $z\in\mathbb{D}$. Et donné par la formule :

$$k_z(w)=\sum_{n\geq 0}\overline{z}^n w^n=\frac{1}{1-\overline{z}w},\forall z,w\in\mathbb{D}$$

$$k_z(w)=\frac{1}{1-\overline{w}z},\quad w,z\in\mathbb{D}.$$

Et

$$f(z)=\langle f,k_z\rangle \quad f\in H^2$$

Donc la projection orthogonale P_+ de L^2 sur H^2 est donnée par :

$$(P_+f)(z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{f(w)}{1-\overline{z}w}d\mu(w),\quad z\in D\quad f\in L^2(\mathbb{T}).$$

1.2 Espace de Bergman

1.2.1 Espace de Bergman

Définition 1.2. *On définit l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ comme étant l'ensemble des fonctions analytiques sur D qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure $dA(z)$.*

$$L^2_a(D) = \mathscr{A}(D) \cap L^2(D).$$

On écrit $L^2_a(D) = L^2_a$ simplement.

On considère sur L^2_a la norme $\|.\|_2$ associée au produit scalaire

$$< f, g >= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, dA(z), \text{ pour tous } f, g \in L^2_a.$$

Lemme 1.1. *Soit $\mathscr{C}(D)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{D}$. Pour tout compact K de $\mathbb{D}$, l'application restriction définie par :*

$$\begin{array}{ccc} (L^2_a(D), \|.\|_2) & \to & (\mathscr{C}(D), \sup\limits_{z\in K} |.|) \\ f & \mapsto & f_{/K} \end{array}$$

est continue.

Lemme 1.2. *Soit $f \in L^2_a$ alors pour tout $z \in D$. On a*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2} \|f\|_2.$$

Démonstration. Pour $z \in D$. On pose $r_z = 1-|z|$, en utilisant la propriété de la moyenne. On a

$$f(z) = \frac{1}{{r_z}^2} \int_{|z-w|\leq r_z} f(w)\, dA(w)$$

D'où

$$|f(z)| \leq \frac{1}{{r_z}^2} \int_{|z-w|\leq r_z} f(w)\, dA(w) \leq \frac{\|f\|_2}{{r_z}^2} = \frac{\|f\|_2}{(1-|z|)^2}$$

□

Proposition 1.2. *L^2_a est un sous espace fermé de $L^2(D, dA)$.*

Démonstration. Soit $\left(f_n\right)_n$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$ dans $L^2_a(D)$. Donc, la suite $\left(f_n\right)_n$ est aussi de Cauchy pour la topologie de $\mathscr{A}(D)$. Soit K un compact de D, alors

par le lemme précédente, on a

$$\sup_{z\in K}|f_n(z)-f_m(z)|\leq \sup_{z\in K}\frac{\|f_n(z)-f_m\|_2}{(1-|z|)^2}$$

Comme $\mathscr{A}(D)$ est complet pour la convergence uniforme, Il existe donc f analytique sur D, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{z\in K}|f_n(z)-f(z)|=0, \forall K \ compact \ \ deD.$$

De même $L^2(D,dA)$ est complet comme espace d'Hilbert, Donc il existe une fonction $g\in L^2(D,dA)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f_n-g\right\|_2=0.$$

ainsi il existe une sous-suite de $\left(f_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque par tout vers g. Finalemet par inégalité $f=g$ presque partout et donc $f\in L^2_a(D)$. On conclut que l'espace L^2_a est fermé dans L^2 donc est un espace de Hilbert. □

Lemme 1.3. *Les fonctions $e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n$ $(n\in\mathbb{N})$ constituent une base orthonormale de L^2_a.*

Démonstration. Pour $n,m\in\mathbb{N}$ et $z\in D$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle e_n,e_m\rangle &= \int_{\mathbb{D}}\left(\sqrt{n+1}z^n\right)\overline{\left(\sqrt{m+1}z^m\right)}dA\\
&= \sqrt{n+1}\sqrt{m+1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^n e^{in\theta}r^m e^{-im\theta}\frac{1}{\pi}r\,dr\,d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}\,dr\,d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\frac{1}{n+m+2}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\,d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(m+1)^2}{\pi^2}}\frac{2\pi}{2m+2}\delta_{n,m}\\
&= \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

où

$$\delta_{n,m}=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq m\\ 1 & \text{si } n=m\end{cases}$$

□

Définition 1.3. *L'application évaluation de L^2_a dans $\mathbb{C}$. qui à toute fonction f lui assosie sa*

valeur au point z, est continue pour tout $z \in D$, d'après le thèorème **??**, $L^2_a(D)$ *admet un noyau reproduisant K également appelé noyau de Bergman. D'aprés le lemme 1.3 La famille $e_n(z)$ est une base hilbertienne orthonormée de L^2_a on a pour tout $z, w \in D$,*

$$\begin{aligned} K_z(w) &= \sum_{n\geq 0}(n+1)\overline{z}^n w^n \\ &= \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} \end{aligned}$$

Le noyau normalisé est alors

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|} = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}, \forall z, w \in D.$$

Ce noyau reproduisant a la propriété suivante.

Lemme 1.4. *k_z converge faiblement vers 0 quand z tend vers le bord du disque.*

Démonstration. Soit p un polynôme en z sur D, on a

$$\langle k_z, p\rangle = (1-|z|^2)\langle p, K_z\rangle = (1-|z|^2)p(z).$$

Cette expression tend clairement vers 0 quand $|z|$ tend vers 1. Enfin, comme l'ensemble des polynômes est dense dans L^2_a, k_z tend faiblement vers 0 quand z tend vers le bord de D. □

Corollaire 1.3.

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, dA(w) = 1, \quad \forall z \in D.$$

Démonstration. pour tout $z \in D$ on a

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, dA(w) = (1-|z|^2)^2\,\langle K_z, K_z\rangle = (1-|z|^2)^2 K(z,z) = 1.$$

□

1.3 Matrice d'un opérateur

Soient $\mathscr{E} = (e_j)_{j\in J}$ et $\mathscr{E}' = (e'_i)_{i\in I}$ des bases orthonormales dans les espaces de Hilbert H et H', respectivement (les ensembles d'indices ne sont pas nécessairement les mêmes), et soit

$$T : Vect(\mathscr{E}) \longrightarrow H'$$

une application linéaire. La matrice de T par rapport à $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ est

$$(t_{ij})_{i,j} = (\langle Te_j, e'_i \rangle)_{i,j},$$

de sorte que la j-ième colonne représente les coefficients de la décomposition

$$Te_j = \sum_i \langle Te_j, e'_i \rangle e'_i \tag{1.1}$$

dans la base $\mathscr{E}'$. Si $H = H'$ et $\mathscr{E} = \mathscr{E}'$, on parle de la matrice de T par rapport à $\mathscr{E}$.

Réciproquement, une matrice $(t_{ij})_{ij}$ sur $I \times J$ telle que, pour tout $j \in J$,

$$\sum_i |t_{ij}|^2 < +\infty,$$

engendre une application linéaire de l'enveloppe vectorielle $Vect(\mathscr{E})$ dans H',

$$\begin{aligned} T &: Vect(\mathscr{E}) \longrightarrow H' \\ T\left(\sum a_j e_j\right) &= \sum_i \left(\sum_j a_j t_{ij} \right) e'_i. \end{aligned}$$

Il est clair que la continuité et la norme de l'opérateur T,

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in Vect(\mathscr{E}), \|x\| \leq 1\}$$

ne dépendent que de la matrice $(t_{ij})_{ij}$, et non du choix des bases orthonormales $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$.

De plus, si $U : Vect(\mathscr{E}) \longrightarrow H'$ est une autre application linéaire, alors $T = U$ si et seulement si leurs matrices coïncident ($t_{ij} = u_{ij}$ pour tous i, j).

1.4 Matrice et opérateur de Laurent

Définition 1.4. *Soit ϕ une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$, l'opérateur de multiplication par ϕ, notée par M_ϕ (ou encore opérateur de Laurent) sur l'espace $L^2(\mathbb{T})$, est l'opérateur défini par $M_\phi(f) = \phi f$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$.*

Notons que cet opérateur est bien défini si le produit ϕf est dans $L^2(\mathbb{T})$. On note par $D(M_\phi)$ le domaine de d éfinition de M_ϕ

$$D(M_\phi) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \phi f \in L^2(\mathbb{T}) \right\}.$$

Et on écrit

$$\begin{aligned} M_\phi &: D(M_\phi) \subset L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) \\ f &\mapsto M_\phi(f) = \phi f. \end{aligned}$$

Notons aussi que l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}$ est un sous ensemble de $D(M_\phi)$ dense dans $L^2(\mathbb{T})$ (voir [13]), donc $D(M_\phi)$ est lui aussi dense dans $L^2(\mathbb{T})$.

On peut aussi définir l'opérateur de Laurent sur l'espace des polynômes trigonométriques $\mathscr{P} = Vect(\mathscr{E} = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}), e_k = z^k, (k \in \mathbb{Z})$ ($\mathscr{P}$ étant muni de la norme $\|.\|_2$), si $\phi \in L^2(\mathbb{T})$ par :

$$\begin{aligned} M_\phi &: \mathscr{P} \to L^2(\mathbb{T}) \\ f &\mapsto M_\phi(f) = \phi f. \end{aligned}$$

Proposition 1.4. *Soit $\phi \in L^2(\mathbb{T})$ et soit $M_\phi : D(M_\phi) \subset L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur de Laurent, $M_\phi(f) = \phi f, \forall f \in L^2(\mathbb{T})$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
1. $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$.
2. M_ϕ est borné.
De plus, on a $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Démonstration. Si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $\phi f \in L^2(\mathbb{T})$ et

$$\|M_\phi f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |\phi(\zeta) f(\zeta)|^2 \, d\mu(\zeta) \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2, \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Et $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Supposons que M_ϕ est borné, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|M_\phi\|_2 \leq C \|f\|_2, \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

En particulier, pour $f = \mathbf{1}$ on obtient

$$\|M_\phi 1\|_2 = \|\phi 1\|_2 \leq C \|1\|_2 = C,$$

et pour $f = \phi$ on obtient

$$\|M_\phi \phi\|_2 = \|\phi^2\|_2 \leq C \|\phi\|_2 = C^2.$$

Alors

$$\|M_\phi \phi^{n-1}\|_2 = \|\phi^n\|_2 \leq C^{n-1} \|\phi\|_2 = C^n,$$

ce qui donne $\left\|\phi^n\right\|_2 \leq C^n, \forall n \in \mathbb{N}$, et

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) \leq 1.$$

On obtient donc

$$\mu(\{\zeta \in \mathbb{T} : \frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1\}) = 0.$$

En effet, supposons le contraire. on a alors

$$\{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1\} = \underset{m\in\mathbb{N}^*}{\cup} \{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1 + \frac{1}{m}\},$$

et

$$\{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1 + \frac{1}{m_1}\} \subset \{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1 + \frac{1}{m_2}\}, \forall m_2 \geq m_1.$$

D'où

$$\mu(\{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1\}) = \lim_{m\to\infty} \mu(\{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1 + \frac{1}{m}\}).$$

Alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1 + \frac{1}{m_0}\}) > 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) &\geq \int_{\{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1 + \frac{1}{m_0}\}} \left(\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) \\ &= (1 + \frac{1}{m_0})^{2n} \mu(\{\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C} > 1 + \frac{1}{m_0}\}). \end{aligned}$$

Quand $n \to \infty$, on obtient $\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) \to \infty$, ce qui fait une contradiction avec le fait que $\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\left|\phi(\zeta)\right|}{C}\right)^{2n} d\mu(\zeta) \leq 1$.

Donc $\left|\phi(\zeta)\right| \leq C$ *p.p.* sur $\mathbb{T}$, et ϕ est bornée.

Soit l'ensemble $E_n = \left\{\left|\phi(\zeta)\right| > \left\|\phi\right\|_\infty - \frac{1}{n}\right\}, n \in \mathbb{N}$, et soit $\mathcal{X}_{E_n}$ sa fonction caractéristique. Il est clair que $\mu(E_n) > 0$, et pour n assez grand tel que $\left\|\phi\right\|_\infty - \frac{1}{n} > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left\|M_\phi \mathcal{X}_{E_n}\right\|_2^2 &= \int_{E_n} \left|\phi(\zeta)\right|^2 d\mu(\zeta) \\ &\geq \int_{E_n} (\left\|\phi\right\|_\infty - \frac{1}{n})^2 d\mu(\zeta) = (\left\|\phi\right\|_\infty - \frac{1}{n})^2 \mu(E_n). \end{aligned}$$

Comme $\mu(E_n) = \left\|\mathcal{X}_{E_n}\right\|_2$, on pose $f_n = \frac{\mathcal{X}_{E_n}}{\left\|\mathcal{X}_{E_n}\right\|_2}$. On a $\left\|M_\phi f_n\right\|_2 \geq \left\|\phi\right\|_\infty - \frac{1}{n}$, pour n assez grand. Il s'ensuit alors que

$$\|M_\phi\|_2 \geq \|\phi\|_\infty .$$

□

Théorème 1.5. *([5]) Soit T un opérateur linéaire sur $L^2(\mathbb{T})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
1/ T est un opérateur de Laurent.
2/ $M_z T = T M_z$, où M_z est l'opérateur de translation bilat ère (de shift bilatère) dans $L^2(\mathbb{T})$.

Démonstration. Supposons que $T = M_\phi$ avec $\phi \in L^2(\mathbb{T})$. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a

$$M_\phi M_z f = \phi z f = z\phi f = M_z M_\phi f .$$

Réciproquement, supposons que $M_z T = T M_z$. On pose $\phi = T1$. Par définition on a $\phi \in L^2(\mathbb{T})$. Et par suite

1/ Si $n \geq 0$ alors

$$Tz^n = TM_z z^{n-1} = TM_z^n 1 = M_z^n T1 = M_z^n \phi = z^n \phi = \phi z^n = M_\phi z^n .$$

2/ Si $n < 0$ alors

$$Tz^n = TM_z^{*^{-n}} 1 = M_z^{*^{-n}} T1 = M_{\overline{z}}^{-n} \phi = \overline{z}^{-n} \phi = z^n \phi = \phi z^n = M_\phi z^n .$$

Et comme T et M_ϕ sont linéaires on résulte que pour tout $p \in \mathscr{P} = Vect(\mathscr{E} = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}), e_k = z^k, (k \in \mathbb{Z})$ on a $Tp = M_\phi p$.

Et puisque l'espace des polynômes trigonométriques $\mathscr{P}$ dense dans $L^2(\mathbb{T})$, il s'ensuit que $Tf = M_\phi f$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, $T = M_\phi$ sur $L^2(\mathbb{T})$. □

Définition 1.5. *Une matrice de Laurent est une matrice A de coefficients complexes bilatéralement infinie de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & \ddots \\ \ddots & c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ddots \\ \ddots & c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & \ddots \\ \ddots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

c'est-à-dire : les coefficients d'une même diagonale sont égaux.

Comme dans la section 1.3, et pour $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, la matrice $A = (c_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ de l'opérateur de

Laurent M_ϕ par rapport à la base $\mathscr{E} = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}, e_k = z^k, (k \in \mathbb{Z})$ est de la forme (1.2), et on a :

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \langle M_\phi e_j, e_i\rangle = \langle M_\phi z^j, z^i\rangle = \int_{\mathbb{T}} \phi(z) z^j z^{-i} d\mu(z) \\ &= \widehat{\phi}(i-j), \end{aligned}$$

où $\widehat{\phi}(i-j)$ défine le $(i-j)^{ème}$ coefficient de Fourier de ϕ. Et aussi les coefficients d'une même diagonale sont égaux c'est-à-dire $c_{i,j} = c_{i+k,j+k}$.

Si on suppose que $A = (c_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}} = (\langle Te_j, e_i\rangle)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ la matrice de T, avec T borné dans $L^2(\mathbb{T})$, et A est de Laurent $(c_{i,j} = c_{i+k,j+k})$, c'est à dire $\langle Te_j, e_i\rangle = \langle Te_{j+k}, e_{i+k}\rangle$, on a

$$\begin{aligned} \langle TM_z e_j, e_i\rangle &= \langle Tz^{j+1}, z^i\rangle = \langle Tz^j, z^{i-1}\rangle = \langle Tz^j, M_z^* z^i\rangle \\ &= \langle M_z T e_j, e_i\rangle. \end{aligned}$$

Donc $M_z T = T M_z$, et T est bien un opérateur de Laurent. On a le théorème (voir [5]) suivant.

Théorème 1.6. *Un opérateur linéaire sur $L^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de Laurent si et seulement si sa matrice par raport à la base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent.*

Démonstration. Si L_ϕ un opérateur de Laurent borné et si $A = (a_{ij})ij \in \mathbb{Z}$ est sa matrice dans la base orthonormée $(e\,n)_{n\in\mathbb{Z}}$.Alors

$$\begin{cases} a_{ij} & = \langle L_\phi e_j, e_i\rangle = \langle \phi\, e_j, e_i\rangle \\ a_{i+k\,j+k} & = \langle \phi\, e_j e_k, e_k e_i\rangle = \langle \phi\, e_j, e - k e_k e_i\rangle \end{cases} = \langle \phi\, e_j, e_i\rangle$$

Donc $a_{ij} = a_{i+k\,j+k}$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$ et A est une matrice de Laurent .
Soit M un opérateur borné sur $L^2(T)$ dans la matrice dans la base orthonormée de $L^2(T)$ est une matrice de Laurent pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{Z}$,$\langle M e_{j+1}, e_{i+1}\rangle = \langle M e_J, e_i\rangle$.Pour prouver que M est bien un opérateur de Laurent .il suffit , d'après le Théorème 1,1,4 de prouver que M commute avec la translation bilatérale L_{e_1},ce que est vrai car :

$< M L_{e_1}.e_i >=< M e_{j+1}, e_i >$
$=< M e_{j+1}, e_{i-1} >$
$=< M e_{j+1}, L^* e 1 e_i >$
$=< L e_1 M e_{j+1}, e_i >$ *pour tout* $(i,j) \in \mathbb{Z}$ □

CHAPITRE 2

Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy et sur l'espace de Bergman.

2.1 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy

Définition 2.1. *Une matrice de Toeplitz est une matrice unilatéralement infinie* $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$ *(ne dépend que de la différence des indices c'est à dire :* $a_{i,j} = a_{i-j}$*). Autrement dit, une matrice de Toeplitz est une matrice de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Comme dans la cas de la matrice de Laurnet, les coefficients d'une matrice $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$ *de Toeplitz, d'une même diagonale sont égaux* $(a_{i,j} = a_{i+1,j+1}, \forall\, i, j \in \mathbb{Z}_+)$.

Définition 2.2. *Soit* M_ϕ *un opérateur de Laurent borné sur* $L^2(\mathbb{T})$*. On appelle opérateur de Toeplitz de symbole* ϕ *et on note* T_ϕ*, l'opérateur défini sur* $H^2(\mathbb{T})$ *par :*

$$\begin{aligned} T_\phi \quad &: \quad H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}) \\ f \quad &\mapsto \quad T_\phi(f) = P_+(M_\phi f) = P_+(\phi f). \end{aligned}$$

L'opérateur T_ϕ *est donc la compression de l'opérateur de Laurent* M_ϕ *sur* $H^2(\mathbb{T})$ *(on dit aussi*

que M_ϕ est une dilatation de T_ϕ).

Proposition 2.1. *Soit $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors*
1/ $\forall f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a : $\langle M_\phi f, g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle$.
2/ T_ϕ est positif si et seulement si M_ϕ est positif.

Démonstration. 1) Soit $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a

$$\langle M_\phi f, g\rangle = \langle M_\phi f, P_+ g\rangle = \langle P_+^* M_\phi f, g\rangle = \langle P_+ M_\phi f, g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle.$$

2) Soit $f \in H^2(\mathbb{T})$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle T_\phi f, f\rangle &= \langle M_\phi f, f\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle M_z^n M_\phi f, M_z^n f\rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle M_\phi M_z^n f, M_z^n f\rangle \geq 0, \text{ pour tout } f \in H^2(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

En particulier pour $f = \mathbf{1}$ on obtient

$$\langle M_\phi M_z^n \mathbf{1}, M_z^n \mathbf{1}\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle M_\phi z^n, z^n\rangle \geq 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Et comme l'ensemble des polynômes $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$, il en résulte que

$$\langle M_\phi f, f\rangle \geq 0, \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

□

Proposition 2.2. *Soit $\varphi, \phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. on a alors les propriétés suivantes.*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $T_{\alpha\varphi+\beta\phi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\phi$*
2. $\|T_\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty$.
3. *$T_{\overline{\varphi}}$ est l'adjoint de T_φ.*
4. *$T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*
5. *Si $\phi \in \mathscr{H}^\infty(\mathbb{D})$, alors $T_\phi T_\varphi = T_{\phi\varphi}$ et $T_{\overline{\phi}} T_\varphi = T_{\overline{\phi}\varphi}$.*

Démonstration. La propriété 1) découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale.
2) On a pour tout $f \in H^2(\mathbb{T})$

$$\|T_\phi(f)\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|P_+(M_\phi f)\| = \|P_+(\varphi f)\| \leq \|P_+\| \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{H^2(\mathbb{T})},$$

donc

$$\|T_\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty.$$

3) On a pour tout $f, g \in H^2(\mathbb{T})$

$$\langle f, T_\phi g\rangle = \langle f, M_\phi g\rangle = \left\langle M_\phi^* f, g\right\rangle = \langle M_{\overline{\phi}} f, g\rangle = \left\langle T_{\overline{\phi}} f, g\right\rangle.$$

4) Si T_φ est nul, alors pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle T_\varphi z^n, z^m\right\rangle &= 0 \Leftrightarrow \left\langle T_\varphi z^n, z^m\right\rangle = \left\langle P_+(\varphi z^n), z^m\right\rangle \\ &\Leftrightarrow \left\langle T_\varphi z^n, z^m\right\rangle = \left\langle \varphi z^n, z^m\right\rangle \\ &\Leftrightarrow \left\langle T_\varphi z^n, z^m\right\rangle = \left\langle \varphi, \overline{z}^n z^m\right\rangle,\end{aligned}$$

mais la famille des polynômes en $(z, \overline{z})$ est dense dans $H^2(\mathbb{T})$ donc φ est orthogonale à $\overline{z}^n z^m$, c'est à dire φ est nulle.

Il est clair que si φ est nulle l'opérateur T_φ est nul.

5) Pour tout $f \in H^2(\mathbb{T})$, il est clair que ϕf est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et ϕ étant bornée, et $\phi f \in H^2(\mathbb{T})$, alors $T_\phi(f) = P_+(\phi f) = \phi f$ ainsi

$$T_\varphi T_\phi = T_\varphi(\phi f) = P_+(\varphi \phi f) = T_{\phi\varphi}(f).$$

La deuxième partie est une conséquence immédiate de la premiè re. □

Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ la matrice de l'opérateur de Toeplitz par rapport à la base orthonormée $\mathscr{E} = (e_n(z))_{n\geq 0} = (z^n)_{n\geq 0}$ de $H^2(\mathbb{T})$. Alors pour tout entier positif k, on a :

$$a_{i+k,j+k} = \left\langle T_\varphi z^{j+k}, z^{i+k}\right\rangle = \left\langle \varphi z^{j+k}, z^{i+k}\right\rangle = \left\langle \varphi z^j, z^i\right\rangle = a_{i,j}.$$

Donc $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une matrice de Toeplitz.

Théorème 2.3. *Soit T un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$ dont sa matrice par rapport à la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est de Toeplitz. Alors T est un opérateur de Toeplitz.*

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère sur $L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur T_n dé fini par

$$T_n = M_z^{*n} T P_+ M_z^n.$$

On a alors

$$\|T_n\| = \|T\|.$$

Ainsi, T_n est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$.

On a aussi, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left\langle T_n z^j, z^i\right\rangle &= \left\langle M_z^{*n} T P_+ M_z^n z^j, z^i\right\rangle = \left\langle T P_+ M_z^n z^j, M_z^n z^i\right\rangle \\ &= \left\langle T P_+ z^{j+n}, z^{i+n}\right\rangle = \left\langle T z^{j+n}, z^{i+n}\right\rangle = \left\langle T z^j, z^i\right\rangle.\end{aligned}$$

Et pour $i, j \in \mathbb{Z}$, il existe toujours un entier positif N tel que pour tout $n \geq N$, $i+n$ et $j+n$ sont tous les deux positifs donc,

$$\left\langle T_n z^j, z^i \right\rangle = \left\langle T P_+ z^{j+n}, z^{i+n} \right\rangle = \left\langle T z^{j+n}, z^{i+n} \right\rangle.$$

Il en résulte que la suite $(\left\langle T_n z^j, z^i \right\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang donc convergente (car $\left\langle T z^{j+n}, z^{i+n} \right\rangle$ ne dépend pas de n). Ainsi la suite $(\left\langle T_n p, q \right\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout p, q dans $\mathscr{P}$, et comme $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ alors la suite $(\left\langle T_n f, g \right\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout f, g dans $L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, la suite $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{T})$. On note par $T_\infty f$ la limite faible de $T_n f$, donc

$$\begin{array}{rcl} T_\infty & : & L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) \\ f & \mapsto & T_\infty f \end{array}$$

est un opérateur borné car

$$\left\| T_\infty f \right\|_2 \leq \liminf_n \left\| T_n f \right\|_2 \leq \|T\| \left\| f \right\|_2.$$

Et sa matrice est de Laurent, donc T_∞ est un opérateur de Laurent.

En plus pour tout $i, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} \left\langle P_+ T_\infty z^j, z^i \right\rangle & = & \left\langle T_\infty z^j, z^i \right\rangle \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} \left\langle T_n z^j, z^i \right\rangle \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} \left\langle M_z^{*n} T P_+ M_z^n z^j, z^i \right\rangle \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} \left\langle T z^{j+n}, z^{i+n} \right\rangle \\ & = & \left\langle T z^j, z^i \right\rangle. \end{array}$$

Et comme $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $H^2(\mathbb{T})$ on résulte que

$$P_+ T_\infty f = T f, \forall f \in H^2(\mathbb{T}).$$

C'est à dire T est la compression de l'opérateur de Laurent T_∞ sur $H^2(\mathbb{T})$. Donc T est un opérateur de Toeplitz. □

Nous pouvons déduire le symbole φ à partir des coefficients de la matrice de Toeplitz $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$. En effet, on a

$$a_{ij} = \left\langle T_\varphi z^j, z^i \right\rangle = \left\langle \varphi z^j, z^i \right\rangle = \left\langle \varphi, z^{j-i} \right\rangle = \widehat{\varphi}(i-j).$$

Alors

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}(i) = \left\langle T_\varphi z^0, z^i \right\rangle = \left\langle T_\varphi 1, z^i \right\rangle = a_{i0} \\ \widehat{\varphi}(-j) = \left\langle T_\varphi z^j, z^0 \right\rangle = \left\langle T_\varphi z^j, 1 \right\rangle = a_{0j}. \end{cases}$$

L'unicité du symbole φ est assurée par l'unicité des coefficients de Fourier donnés par la formule précédente.

La proposition 1.4 nous permet de dire (comme dans le cas de l'opérateur de Laurent), qu'un opérateur de Toeplitz est borné si et seulement si son symbol est borné.

Définition 2.3. *La matrice de l'opérateur de Toeplitz T_φ définit dans la base orthonormée $\{1, z, z^2, z^3 ...\}$ de H^2 par une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:*

$$a_{ij} = \langle T_\varphi z^j, z^i \rangle = \langle P(\varphi z^j), z^i \rangle = \langle \varphi z^j, P z^i \rangle = \langle \varphi, z^{i-j} \rangle = \widehat{\varphi}(j-i)$$

C'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.4. *[3] Tout opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$. dont la matrice dans la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz , est un opérateur de toeplitz .*

Démonstration. Soit T un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$ tel que

$$\langle T e_{j+1}, e_i \rangle = \langle T e_j, e_i \rangle \quad \forall i, j \geq 0.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'opérateur $T_n = L_{e_1}^{*n} T P + L_{e_1}^n$ défini et borné de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$. Pour tout couple (i, j) d'entiers positifs, on a :

$$\begin{aligned} \langle T_n e_j, e_i \rangle &= \langle L_{e_1}^{*n} T P + L_{e_1}^n e_j, e_i \rangle \\ &= \langle T P + L_{e_1}^n e_j, L_{e_1}^n e_i \rangle \\ &= \langle T P + e_{j+n}, e_{i+n} \rangle \\ &= \langle T e_{j+n}, e_{i+n} \rangle \\ &= \langle T e_j, e_i \rangle \end{aligned}$$

Si i et j sont tous les deux négatifs, il existe toujours un entier positif N tel que pour tout entier $n \geq N$, les entiers $i+n$ et $j+n$ soient tous les deux positifs et donc

$$\langle T_n e_j, e_i \rangle = \langle T P + e_{j+n}, e_{i+n} \rangle = \langle T e_{j+n}, e_{i+n} \rangle$$

Puisque la matrice de T est une matrice de Toeplitz. le terme à droite dans l'égalité précédente est indépendant de n. Il vient alors que pour tous i et j dans 0,±1,±2,± ..., la suite $(\langle T_n e_j, e_i\rangle)_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain trigonométriques alors la suite $(< T_n p, q >)_{n\geq 0}$ est convergente. Comme l'ensemble des polynomes trigonométriques est dense dans $L^2(\mathbb{T})$,alros pour tout couple de fonctions f et$g$ dans $L^2(\mathbb{T})$ la suite $(< T_n f, g >)_{n\geq 0}$ est convergente.Ceci implique que la suit $(T_n f)_{n\geq 0}$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{T})$. On note $T_\infty f$ sa limite faible.
L'opérateur T_∞ défini de la maniérz suivante

$$\begin{aligned} T_\infty : L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f &\longrightarrow T_\infty f \end{aligned}$$

ou$T_\infty f$ est la limite faible de $(T_n f)_{n\geq 0}$ dans $L^2(\mathbb{T})$,est un opérateur borné.
En effet la convegence faible de $(T_n f)_{n\geq 0}$ vers $T_\infty f$ implique que :

$$\|T_\infty f\|_2 \leq \liminf_n \|T_\infty f\|_2$$

or $\liminf_n \|T_\infty f\|_2 \leq \|T\|\|f\|_2$ car $\|T_n\| \leq \|T\|$

Pour tous $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots\}$, on a :

$$\begin{aligned} < T_\infty e_j, e_i > &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < T_n e_j, e_i > \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < L_{e_1}^{*n} T P_+ L_{e_1}^n e_j, e_i > \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < L_{e_1}^{*n+1} T P_+ L_{e_1}^{n+1} e_j, e_i > \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < L_{e_1}^{*n} T P_+ L_{e_1}^{n+1} e_{j+1}, e_{i+1} > \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < T_n e_{j+1}, e_{i+1} > \\ &=< T_\infty e_{j+1}, e_{i+1} >, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la matrice de l'opérateur T_∞ dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ est une matrice de laurent et donc , par le Théorème 1.2.3 l'opérateur T_∞ est un opérateur de laurent.

Pour tout couple d'entiers positifs (k, j) , on a :

$$\begin{aligned}
< P_+ T_\infty e_j, e_k > &=< T_\infty e_j, e_k > \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < L_{e_1}^{*n} T P_+ L_{e_1}^n e_j, e_k > \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < T P_+ L_{e_1}^n e_j, L_{e_1}^n e_k > \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < T P_+ e_{j+n}, e_{k+n} > \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < T e_{j+n}, e_{k+n} > \\
&=< T e_j, e_k > .
\end{aligned}$$

puisque l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans$H^2(\mathbb{T})$, on déduit du calcul précédent que , pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$

$$P_+ T_\infty f = T f.$$

Grâce à la Remarque 1.4.3 on conclut que T est une compression à $H^2(\mathbb{T})$ de l'opérateur de laurent T_∞ et donc T est un opérateur de **Teoplitz**. □

Ce théorème montre que si la matrice d'un opérateur borné sur H^2 est une matrice de Toeplitz alors necessairement cet opérateur est un opérateur de Toeplitz.

2.2 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman

On rappelle que $L_a^p(\mathbb{D})$ est un espace fermé dans $L^p(\mathbb{D})$. Alors la projection orthogonale de $L^p(\mathbb{D})$ dans $L_a^p(\mathbb{D})$ est bien définie, et on la note encore P_+

$$\begin{aligned}
P_+ \quad &: \quad L^p(\mathbb{D}) \longrightarrow L_a^p(\mathbb{D}) \\
f \quad &\mapsto \quad P_+(f).
\end{aligned}$$

Définition 2.4. *Soit φ une fonction bornée sur $\mathbb{D}$. On définit l'opérateur de Toeplitz à symbole φ sur l'espace $L_a^2(\mathbb{D})$ par*

$$\begin{aligned}
T_\varphi \quad &: \quad L_a^2(\mathbb{D}) \longrightarrow L_a^2(\mathbb{D}) \\
f \quad &\mapsto \quad P_+(\varphi f).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

En utilisant la représentation intégrale de P_+, nous pouvons voir T_φ comme un opérateur intègrale donné par :

$$T_\varphi f(z) = P_+(\varphi f)(z) = \langle \varphi f, K_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w) f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w), \forall z \in \mathbb{D}.$$

De la définition on résume les propriétés suivantes

Proposition 2.5. [16]*Soit $\varphi, \phi \in L^\infty(\mathbb{D})$*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $T_{\alpha\varphi+\beta\phi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\phi$.*
2. $\|T_\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty$.
3. *$T_{\overline{\varphi}}$ est l'adjoint de T_φ.*
4. *$T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*
5. *Si $\phi \in \mathscr{H}^\infty(\mathbb{D})$ alors $T_\phi T_\varphi = T_{\phi\varphi}$ et $T_{\overline{\phi}} T_\varphi = T_{\overline{\phi}\varphi}$.*

Démonstration. 1) Soit $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, on a

$$\begin{aligned} T_{\alpha\varphi+\beta\phi}(f) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(\alpha\varphi+\beta\phi)(w) f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w) f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w) + \beta \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w) f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w) \\ &= \alpha T_\varphi(f) + \beta T_\phi(f). \end{aligned}$$

2) On a pour $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, alors

$$\|P_+(f)\| = f,$$

i.e.

$$\|P_+\| = 1,$$

et aussi

$$\|T_\varphi(f)\| = \|P_+(\varphi f)\| \leq \|P_+\| \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|,$$

donc $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

3) Soient $f, g \in L^2_a(\mathbb{D})$, on a

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi f, g \rangle &= \langle P_+(\varphi f), g \rangle = \langle \varphi f, P_+^*(g) \rangle = \langle \varphi f, P_+(g) \rangle \\ &= \langle \varphi f, g \rangle = \langle f, \overline{\varphi} g \rangle = \langle P_+(f), \overline{\varphi} g \rangle \\ &= \langle f, P_+^*(\overline{\varphi} g) \rangle \\ &= \langle f, T_{\overline{\varphi}} g \rangle. \end{aligned}$$

4) Si T_φ est nul alors pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle T_\varphi z^n, z^m\right\rangle &= 0 \Leftrightarrow \left\langle T_\varphi z^n, z^m\right\rangle = \left\langle P_+(\varphi z^n), z^m\right\rangle \\ &\Leftrightarrow \left\langle T_\varphi z^n, z^m\right\rangle = \left\langle \varphi z^n, z^m\right\rangle \\ &\Leftrightarrow \left\langle T_\varphi z^n, z^m\right\rangle = \left\langle \varphi, \overline{z}^n z^m\right\rangle,\end{aligned}$$

mais la famille des polynômes en $(z,\overline{z})$ est dense dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ donc φ est orthogonale à $\overline{z}^n z^m$, c'est à dire φ est nulle.

5) Pour tout $f \in L^2_a(\mathbb{D}, dA)$, $\phi \in \mathscr{H}^\infty(\mathbb{D})$ vient de dire que ϕf est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et ϕ étant bornée, ainsi $\phi f \in L^2_a(\mathbb{D}, dA)$, alors $T_\phi(f) = P_+(\phi f) = \phi f$ et

$$T_\varphi T_\phi = T_\varphi(\phi f) = P_+(\varphi \phi f) = T_{\phi\varphi}(f).$$

Par la même façon on peut montrer la deuxième partie. □

La propriété de la proposition précedente nous a affirmé que si le symbole φ de l'opérateur T_φ est supposé borné comme dans la définition, l'opérateur T_φ est lui aussi borné. En réalité l'opérateur de Toeplitz T_φ sur l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ peut ê tre borné sans que son symbole le soit. Au contraire de l'opérateur de Toeplitz T_φ sur l'espace de Hardy qui est borné si et seulement si son symbole est borné. Une autre propriété est satisfaisante pour T_φ sur l'espace de Hardy et n'est pas dans l'espace de Bergman est la suivante (T_φ est compact si et seulement si φ est nul) .

Proposition 2.6. [15] *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a*

$$T_\varphi(k_z) = (P_+(\varphi \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) k_z.$$

Définition 2.5. *La transformée de Berezin de l'opérateur de Toeplitz T_φ est d éfinie par*

$$\widetilde{T}_\varphi(z) = \left\langle T_\varphi k_z, k_z\right\rangle = \left\langle \varphi k_z, k_z\right\rangle = \widetilde{\varphi}(z).$$

Ainsi, la transformée de Berezin de φ et de T_φ co ïncidents.

2.3 Opérateur de Toeplitz à symbole quasi homogène ou radial

Définition 2.6. *$\phi \in L^1$ est dite radiale si pour tout $z \in \mathbb{D}$*

$$\phi(z) = \phi(|z|)$$

Définition 2.7. *Soit $m \in \mathbb{Z}$. Une fonction $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ est dite m quasi homogène s'il existe $\varphi \in L^\infty([0,1])$ telle que pour tout $z = re^{i\theta}$ de $\mathbb{D}$, on a*

$$\phi(re^{i\theta}) = e^{im\theta}\varphi(r).$$

On dit alors que φ est la partie radiale de ϕ et m le coefficient de quasi homogènéité de ϕ. Dans ce cas, on dit que l'opérateur de Toeplitz T_ϕ est quasi homogène de degré m ou tout simplement m-quasi homogène.
Et si $m = 0$, alors ϕ est dite radiale, et T_ϕ s'appel opérateur radial.

Par exemple la fonction $z^n\overline{z}^m$ est quasihomogène de degré $(n-m)$. Sa partie radiale est la fonction définie par $\varphi(r) = r^{(n-m)}$.

En outre les polynômes de la forme z^m avec $m \in \mathbb{Z}$ denses dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$, et pour tout $m_1 \neq m_2$ on a $e^{im_1\theta}L^2([0,1], r\,dr)$ est orthogonale à $e^{im_2\theta}L^2([0,1], r\,dr)$. On peut alors décomposer $L^2(\mathbb{D}, dA)$ sous la forme

$$L^2(\mathbb{D}, dA) = \bigotimes_{m\in\mathbb{Z}} e^{im\theta}L^2([0,1], r\,dr). \tag{2.3}$$

Ainsi, toute fonction f de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ admet une dé composition sous la forme

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{im\theta} f_m(r), \qquad f_m(r) \in L^2([0,1], r\,dr).$$

La décomposition de l'espace $L^2(\mathbb{D}, dA)$ sous la forme (2.3) nous mène à dire que beaucoup de problèmes liées aux op érateurs de Toeplitz se ramènent aux études des opérateurs de Toeplitz à symboles quasihomogènes ou radiaux. on cite par exemple les travaux de I. Louhichi, E. Strouse et de L. Zakariasy [10], [11], [12].

Lemme 2.1. *Soit ϕ un symbole m-quasihomogène borné, et soit la base orthonormale $\{e_n\}_n = \left\{\sqrt{n+1}z^n\right\}_n$ de $L^2_a(\mathbb{D}, dA)$, alors*

$$T_\phi e_n = \begin{cases} 0 & si\ n+m<0 \\ c_n(\varphi)e_{n+m} & si\ non, \end{cases}$$

où

$$c_n(\varphi) = 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 \varphi(r)r^{2n+m+1}\,dr,$$

telle que φ est la partie radial de ϕ.

Démonstration. Il suffit de calculer $\langle T_\phi e_n, e_p\rangle = \langle \phi e_n, e_p\rangle$ pour tous $p, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\langle T_\phi e_n, e_p\rangle &= \sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_{\mathbb{D}} \phi(z) z^n \bar{z}^p \, dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{im\theta}\varphi(r) r^n e^{in\theta} r^p e^{-ip\theta} r\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+n-p)\theta} d\theta \int_0^1 \varphi(r) r^{n+p+1} dr \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } m+n-p \neq 0 \\ 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+m+1} dr, & \text{si } m+n=p \end{cases} \\
&= 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\left(\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+m+1} dr\right)\delta_{m+n,p}.
\end{aligned}$$

D'ou

$$T_\phi e_n = \begin{cases} 0, & \text{si } m+n-p \neq 0 \\ \left(2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+m+1} dr\right) e_{m+n}, & \text{si } m+n=p. \end{cases}$$

□

Soit maintenant φ une fonction radiale telle que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ (*i.e.* $\varphi \in L^\infty([0,1])$), alors

$$T_\varphi e_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq p \\ \left(2(n+1)\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+1} dr\right) e_n, & \text{si } n = p. \end{cases}$$

Et donc

$$\langle T_\varphi e_n, e_n\rangle = 2(n+1)\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+1} dr.$$

On note encore

$$c_n(\varphi) = \langle T_\varphi e_n, e_n\rangle = 2(n+1)\int_0^1 \varphi(r) r^{2n+1} dr. \tag{2.4}$$

Il est clair d'après (2.4) que si φ est radiale l'opérateur T_φ est diagonal.

CHAPITRE 3

Polynomes Orthogonaux

3.1 Polynomes Orthogonaux

Les polynômes de Legendre constituent la suite la plus simple des polyn ômes orthogonaux sur un intervalle donné $[a,b]$, de nombreux probl èmes font intervenir tout naturellement des suites de cette nature. Le th éorème de Weierstrass (voir [14], [9]) montre que l'espace des fonctions polynômiales est dense dans l'espace de Hilbert $L^2([a,b],dx)$. Une famille orthogonale de polynômes $\{p_n\}_{n\geq 0}$, avec p_n de degré n, est alors une base hilbertienne de $L^2([a,b],dx)$.

Définition 3.1. *Soit $L^2([a,b],dx)$ l'espace de Hilbert de fonctions réelles dé finies sur l'ensemble $[a,b]$, muni de produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$, et $w(x)$ une fonction strictement positive et intégrable sur cet intervalle. Une suite de polynômes $\{p_n(x)\}_{n=0,1,\ldots}$, est dite orthogonale par rapport à la "fonction poids" $w(x)$, si*

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int_\Omega w(x) p_n(x) \overline{p_m(x)} dx = 0, \qquad \forall n \neq m.$$

Autrement dit, pour tout n

$$\langle p_n, p_k \rangle = 0, \qquad \forall k < n.$$

Considérons maintenant l'espace $L^2[-1,1] = L^2([-1,1],dx)$, muni du produit scalaire

$$\langle f,g \rangle_{L^2[-1,1]} = \int_{-1}^{1} w(x) f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Nous allons chercher des polynômes p_n de degré n sur $[-1,1]$, orthogonaux à tous les

polynômes de de degré k inférieur à n. Alors p_n est orthogonal à x^k, $\forall k < n$, il en suit que

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)w(x)x^k\,dx = 0.$$

Par intégration par parties en posant $f^{(n)}(x) = p_n(x)w(x)$, on obtient

$$f^{(n-1)}(1)+(-1)^k f^{(n-1)}(-1)-k\int_{-1}^{1} f^{(n-1)}(x)x^{k-1}\,dx = 0.$$

Il en suit que 1 et -1 sont des racines de $f^{(n-1)}$, ainsi $f^{(n-1)}$ s'écrit sous forme $(1-x^2)w(x)$.

De plus

$$p_n(x)w(x) = \left[(1-x^2)w(x)\right]' = -2x\,w(x)+(1-x^2)w'(x),$$

alors

$$p_n(x) = (1-x^2)\frac{w'(x)}{w(x)}-2x.$$

Pour $n = 1$, on a $p_1(x)$ de degré 1, on résoud l'é quation

$$(1-x^2)\frac{w'(x)}{w(x)}-2x = Ax+B,$$

et on obtient la solution sous la forme

$$w(x) = \lambda(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta},$$

avec α, β, et λ des constantes arbitraires.

En posant $p_0(x) = \frac{\mu}{\lambda}$, on obtient

$$f(x) = \mu\,w(x) = \mu(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}.$$

Cherchons maintenant $p_n(x)$. Le calcul de la dérivée d'ordre n de f par la formule de Leibniz donne

$$f^{(n)}(x) = \mu\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\left[\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{\alpha}\right]\left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^{\beta}\right].$$

Remarquons qu'on ne peut mettre $(1-x^2)$ et $w(x)$ en facteur de $f^{(n)}(x)$ que si α et β soient supérieurs à n, avec n un entier strictement positif.

Posons alors $\alpha = n+\alpha'$ et $\beta = n+\beta'$; avec $\alpha', \beta' \geq -1$, on a

$$f(x) = (1-x^2)^n(1+x)^{\alpha'}(1-x)^{\beta'} = (1-x^2)^n\,w(x).$$

Finalement, on obtient la formule de Rodrigues

$$p_n(x)=\mu\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n w(x)\right]. \tag{3.1}$$

3.2 Les Polynomes de Legendre

Définition 3.2. *La suite des polynômes de Legendre notée* $\{P_n(x)\}_n$ *dans l'espace* $L^2([-1,1], dx)$, *est caractérisée par la formule de Rodrigues quand* $\alpha'=\beta'=0$, *dans ce cas* $w(x)=1$, $\mu=\frac{(-1)^n}{2^n n!}$. *Chaque polynôme s'é crit sous la forme*

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right].$$

On peut aussi écrit $P_n(x)$ *sous la forme*

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

Nous donnons maintenant les premiers polynômes suivant le degré $n=0,1,...$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x,\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1),\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^2-3x),...
\end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que $P_n(1)=1$, pour tout n.

Théorème 3.1. *Pour tout entier* $n\geq 0$, *on a* $\|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1}$.

Démonstration. En utilisant la formule de Rodrigues 3.1 et par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]dx\\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left[(x^2-1)^n\right]dx,
\end{aligned}$$

la dérivée d'ordre $2n$ de $(x^2-1)^n$ est $(2n)!$ car $(x^2-1)^n$ est de degré $2n$. Alors,

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx.$$

En faisant le changement de variable $s = \frac{1+x}{2}$, et on obtient le ré sultat

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(s-1)^n s^n ds \\ &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Comme on a $\langle P_n, P_m\rangle_{L^2[-1,1]} = 0$, pour tout $n \neq m$, alors

$$\langle P_n, P_m\rangle_{L^2[-1,1]} = \int_{-1}^{1} P_n(x)\overline{P_m}(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}, \tag{3.2}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \tag{3.3}$$

L'équation 3.2 montre que les polynômes $\{p_n\}_{n\geq 0}$

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}P_n(x)$$

forment une base orthonormée de $L^2([-1,1], dx)$. □

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du thé orème d'approximation de Weierstras (voir [14], [9]), qui affirme que l'ensemble des polynômes définis sur $[-1,1]$ est dense dans $C([-1,1])$. Et est aussi dense dans $L^2([-1,1], dx)$.

Théorème 3.2. *La famille des polynômes de Legendre $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une base orthogonale de l'espace $L^2([-1,1], dx)$. Toute fonction f de $L^2([-1,1], dx)$ se développe de façon unique sous la forme*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)P_n,$$

avec

$$c_n(f) = \frac{2n+1}{2}\left\langle f, P_n\right\rangle_{L^2[-1,1]},$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n(f)P_n\right\| = 0.$$

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (voir [7, Ch. 3]) permet de construire à partir de la base canonique $\{x^n\}_{n\geq 0}$ de l'ensemble des polynômes, une famille orthogonale

de polynômes $\{p_n\}_{n\geq 0}$. Ces polynômes vé rifient la relation de récurrence suivante

$$\alpha_n p_{n+1}(x) = (x-\beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x).$$

Pour montrer ce résultat on remarque que $xp_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ et admet donc un développement sous la forme

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,j} p_j(x),$$

avec

$$\begin{aligned} a_{n,j}\left\|p_j\right\|^2 &= \left\langle xp_n, p_j\right\rangle \\ &= \left\langle p_n, xp_j\right\rangle \\ &= a_{j,n}\left\|p_n\right\|^2, \end{aligned}$$

alors $a_{n,j}=0$, pour $j<n-1$. En posant $a_{n,n+1}=\alpha_n$, $a_{n,n}=\beta_n$ et $a_{n,n-1}=\gamma_n$, nous obtenons

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x). \tag{3.4}$$

d'où le résultat.

En examinant ce résultat pour les polynômes de Legendre en faisant $x=1$, on obtient $\beta_n=0$, et $\alpha_n+\gamma_n=1$, et par simple comparaison des termes des deux membres de l'équation (3.4) on trouve

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2n+1}, \qquad \gamma_n = \frac{n}{2n+1}.$$

On obtien la relation de récurrence pour les polynômes de Legendre

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n\geq 1. \tag{3.5}$$

Nous avons aussi pour les dérivés $P_n'(x)$ (voir [7, Sect. 10.10])

$$\begin{aligned} P_{n+1}'(x) &= \sum_{k\geq 0,\ n-2k\geq 0} \frac{2}{||P_{n-2k}||^2} P_{n-2k}(x) \\ &= \sum_{k\geq 0,\ n-2k\geq 0} (2(n-2k)+1)P_{n-2k}(x). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Il est important de mentionner que les systèmes $\{x^n\}_{n\geq 0}$ et $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ peuvent être recalculés l'un en termes de l'autre, de manière simple.

Soit $E(x)$ la partie entière de $x\in\mathbb{R}$, et soit $m!!$ le factoriel impair (ou pair), *i.e.* ,

$$(2m+1)!! = (2m+1)(2m-1)\ldots 1, \qquad (2m)!! = (2m)(2m-2)\ldots 2.$$

Proposition 3.3. *[7, Sect. 10.10] On a*

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{E(n/2)}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}, \tag{3.7}$$

et

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k. \tag{3.8}$$

Il est assez remarquable que ces formules puissent être inversées *explicitement*. Malgré sa forme élégante, nous n'avons pas pu trouver ce résultat dans la littérature, et pour cette raison nous pr éférons en apporter la preuve ; voir aussi une brève note Hui [8] et Schmied [**?**] sur cette question.

Proposition 3.4. *[8] Pour $n\geq 1$, on a*

$$x^n=\sum_{k=n,n-2,\ldots}\frac{(2k+1)n!}{2^{(n-k)/2}((n-k)/2)!(k+n+1)!!}P_k(x). \tag{3.9}$$

Démonstration. La relation (3.9) donne évidemment $P_0(x)=1$ et $P_1(x)=x$. Par récurrence, nous supposons que la formule (3.9) est vrai. Nous voulons montrer que

$$x^{n+1}=\sum_{k=n+1,n-1,\ldots}\frac{(2k+1)(n+1)!}{2^{(n+1-k)/2}((n+1-k)/2)!(k+n+2)!!}P_k(x).$$

Rappelant (3.5), on voit que

$$xP_k(x)=\frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)+\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x).$$

Écrivons $x^{n+1} = x(x^n)$ et remplaçons x^n ci-dessus ; par sa valeur de (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{(n-k)/2}((n-k)/2)!(k+n+1)!!} x P_k(x) \\
&= \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{(n-k)/2}((n-k)/2)!(k+n+1)!!} \frac{k+1}{2k+1}(P_{k+1}(x) \\
&\quad + \frac{k}{2k+1} P_{k-1}(x)) \\
&= \sum_{k=n+1,n-1,\ldots} \frac{kn!(k+n+2)}{2^{(n+1-k)/2}((n+1-k)/2)!(k+n+2)!!} P_k(x) \\
&\quad + \sum_{k=n-1,n-3,\ldots} \frac{(k+1)n!(n+1-k)}{2^{(n-1-k)/2}((n+1-k)/2)!(k+n+2)!!} P_k(x) \\
&= \frac{(n+1)n!(2n+3)}{(2n+3)!!} P_{n+1} \\
&\quad + \sum_{k=n-1,n-3,\ldots} \frac{(2k+1)(n+1)!}{2^{(n-1-k)/2}((n+1-k)/2)!(k+n+2)!!} P_k(x).
\end{aligned}$$

après une série de transformations élémentaires. La proposition est prouvée. □

Pour la suite, il sera utile de spécifier la formule de la proposition ci-dessus au cas où n est pair et impair. Autrement dit, pour $n = 2m$, nous avons

$$\begin{aligned}
x^{2m} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+1)(2m)!}{2^{m-k}(m-k)!(2k+2m+1)!!} P_{2k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+1)(2m)!}{(2m-2k)!!(2k+2m+1)!!} P_{2k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} b_{2m,2k} P_{2k}(x),
\end{aligned}$$

où

$$b_{2m,2k} = \frac{(4k+1)(2m)!}{(2m-2k)!!(2k+2m+1)!!}, \qquad k = 0, \ldots, m.$$

De même, pour $n = 2m+1$,

$$\begin{aligned}
x^{2m+1} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+3)(2m+1)!}{2^{m-k}(m-k)!(2k+2m+3)!!} P_{2k+1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+3)(2m+1)!}{(2m-2k)!!(2k+2m+3)!!} P_{2k+1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} b_{2m+1,2k+1} P_{2k+1}(x),
\end{aligned}$$

où

$$b_{2m+1,2k+1} = \frac{(4k+3)(2m+1)!}{(2m-2k)!!(2k+2m+3)!!}, \qquad k = 0, \ldots, m.$$

3.3 Lien entre les Polynomes de Legendre et l'opérateur de Toeplitz

Nous allons dans cette section faire le lien entre l'opérateur de Topelitz radial et les Polynômes de Legendre

Avant de donner la construction, nous faisons quelques réductions. Tout d'abord, rappelant la formule (2.4), on fait le changement de variable $x = \sqrt{s}$ et on définit $\psi(s) = \varphi(\sqrt{s})$, donc

$$C_n(\psi) := c_n(\varphi) = 2(n+1)\int_0^1 \varphi(x)x^{2n+1}\,dx = (n+1)\int_0^1 \psi(s)s^n\,ds. \tag{3.10}$$

Nous acceptons la notation de la relation ci-dessus pour le reste.

Deuxièmement, nous souhaitons représenter la fonction ψ comme une série de polynômes de Legendre sur $[-1,1]$. Le redimensionnement des polynômes $\{P_n\}$ à l'intervalle $[-1,1]$ conduit à des relations lourdes ; pour garder les formules avec lesquelles nous travaillons raisonnablement simples, nous préférons étendre la fonction ψ sur $[-1,1]$ de manière appropriée.

Pour une fonction $\psi \in L^p[0,1]$, $p \geq 1$, On pose

$$\psi_e(s) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad \psi_o(s) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Bien sûr, nous avons $\psi = \psi_e + \psi_o$ sur $[-1,1]$, où ψ est étendu de zéro à $[-1,0)$, et $\|\psi_e\|^p_{L^p[-1,1]} = \|\psi_o\|^p_{L^p[-1,1]} = 2\|\psi\|^p_{L^p[0,1]}$. il s'ensuit que

$$C_n(\psi) = (n+1)\int_0^1 \psi(s)s^n\,ds = \frac{(n+1)}{2}\int_{-1}^1 \psi_e(s)s^n\,ds =: C_n(\psi_e)$$

pour n pair et $C_n(\psi_e) = 0$ pour n impair. De même,

$$C_n(\psi) = (n+1)\int_0^1 \psi(s)s^n\,ds = \frac{(n+1)}{2}\int_{-1}^1 \psi_o(s)s^n\,ds =: C_n(\psi_o)$$

pour n impair et $C_n(\psi_o) = 0$ pour n pair. En particulier, $C_n(\psi) = C_n(\psi_e)$ pour n pair, et $C_n(\psi) = C_n(\psi_o)$ pour n impair.

Supposons maintenant que $\psi(s)=\sum_{k=0}^{N} a_k P_k(s)$ sur $[-1,1]$. Alors, on a pour $m=2n$ pair

$$\begin{aligned} C_{2n}(\psi) &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^{1}\psi_e(x)x^{2n}\,dx \qquad (3.11)\\ &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{N}a_j P_j(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{n}b_{2n,2k}P_{2k}(x)\right)dx\\ &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{E(N/2)}\sum_{k=0}^{n}b_{2n,2k}a_{2j}P_{2j}(x)P_{2k}(x)\,dx\\ &= \sum_{k=0}^{\min\{n,E(N/2)\}}\left(\frac{2n+1}{4k+1}\,b_{2n,2k}\right)a_{2k} =: \sum_{k=0}^{\min\{n,E(N/2)\}} d_{2n,2k}a_{2k}, \end{aligned}$$

où

$$d_{2n,2k}=\frac{(2n+1)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+1)!!}. \qquad (3.12)$$

Pour $m=2n+1$ impair, on obtient

$$\begin{aligned} C_{2n+1}(\psi) &= \frac{(2n+2)}{2}\int_{-1}^{1}\psi_o(x)x^{2n+1}\,dx \qquad (3.13)\\ &= \frac{(2n+2)}{2}\int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{N}a_j P_j(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{n}b_{2n+1,2k+1}P_{2k+1}(x)\right)dx\\ &= \frac{(2n+2)}{2}\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{E(N/2)}\sum_{k=0}^{n}b_{2n+1,2k+1}a_{2j+1}P_{2j+1}(x)P_{2k+1}(x)\,dx\\ &= \sum_{k=0}^{\min\{n,[N/2]\}}\left(\frac{2n+2}{4k+3}\,b_{2n+1,2k+1}\right)a_{2k+1} =: \sum_{k=0}^{\min\{n,E(N/2)\}} d_{2n+1,2k+1}a_{2k+1}, \end{aligned}$$

où

$$d_{2n+1,2k+1}=\frac{(2n+2)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+3)!!}.$$

Bibliographie

[1] Hedenmalm, H. ; Korenblum, B. ; Zhu, K. Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics, 199. Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] Adams, R. Sobolev spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975 ; exists also as : Adams, R. ; Fournier, J. Sobolev spaces. Second edition. Pure and Applied Mathematics, Vol. 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[3] B. Barusseau. Propriétés spectrales des opérateurs de Toeplitz. Thèse présentée à l'Université Bordeaux 1. Spécialité mathématiques pures. Mai. 2010.

[4] Böttcher A. and Grudsky S. M. Toeplitz matrices, asymptotic linear algebra, and functional analysis. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[5] Brown, A. et Halmos, P. : Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 123 :89–102, 1964.

[6] Duren, P. : Theory of H^p spaces. A series of Monographs and Textbooks. Academic Press, London, 1970.

[7] Erdélyi, A. ; Magnus, W. ; Oberhettinger, F. ; Tricomi, F. Higher transcendental functions. Vol. II. Based on notes left by Harry Bateman. Reprint of the 1953 original. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla., 1981.

[8] Hui, A. Monomials in terms of Legendre polynomials, https ://math.stackexchange.com/questions/1586202/monomials-in-terms-of-legendre-polynomials/1586525#1586525, 2015.

[9] Karen Saxe, Beginning functional analysis, Springer, Undergraduate texts in mathematics, ed. 1, 2002.

[10] Louhichi, I. ; Zakariasy, L. On Toeplitz operators with quasi-homogeneous symbols. Arch. Math. (Basel) 85 (2005), no. 3, 248-257.

[11] Louhichi, I. ; Strouse, E. ; Zakariasy, L. Products of Toeplitz operators on the Bergman space. Integr. Eq. Oper. Theory 54 (2006), no. 4, 525-539.

[12] Louhichi, I. ; Randriamahaleo, F. ; Zakariasy, L. On the commutativity of a certain class of Toeplitz operators. Concr. Oper. 2 (2015), 1-7.

[13] Rudin, W. : Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 3e édition, 1987.

[14] Serge L. (auth.), Real and Functional Analysis, Springer-Verlag New York, Graduate Texts in Mathematics 142, 1993.

[15] Stroethoff, K. Compact Toeplitz operators on Bergman spaces. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 124 (1998), no. 1, 151-160.

[16] Zhu, K. Operator theory in function spaces. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.