الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DR. YAHIA FARES DE MEDEA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

Département du Génie Électrique



Mémoire de Fin d'Études

Présenté pour l'obtention du Diplôme
de Master en Génie Électrique

Option : systemes des télécomunications

THEME LES ONDELETTES ET LEURS APPLICATIONS EN TRAITEMENT DE SIGNAL ET COMMUNICATIONS

Proposé et dirigé par,

M.LAIDI Kamel

Préparé et présenté par,

M.BENYAHIA Abdenour

Promo :2020-2021

Dédicaces

je dédie ce travail

à mes chers parents qui ont sacrifié leur vie

pour mon succès et leurs encouragements durant tout mon parcours scolaire,

à toute la famille ***Benyahia****,*

sans oublier tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation depuis le primaire ce jour, à tous mes amis et tous mes frères de groupe et la spécialité en général également à tous ceux qui m'ont aidé pour réaliser ce mémoire

enfin, à tous ceux que j'aime, et qui m'aiment

Benyahia abdenour

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions ***mon dieu*** *qui nous a armé de patience et de courage durant ces longues années d'étude.*

nous souhaitons adresser nos remerciements tous les professeurs de mon spécialité qui nous aidé durant le parcours universitaire et ***M.LAIDI Kamel*** *pour son aide précieuse à l'élaboration de ce mémoire, ce dernier a toujours été à notre écoute, sa disponibilité pour la réalisation de ce mémoire fut remarquable et nous en sommes reconnaissant.*

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à toutes nos enseignants qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Enfin, nous tenons également à remercier nos amis qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à tous

ملخص

اكتسبت المويجات أهمية كبيرة خاصة في السنوات الأخيرة بفضل التنوع الكبير في مجالات تطبيقها في مجال الاتصال. في مجالنا ، يجب تعديل كل ما هو موجود في معالجة الإشارات مثل الإشارات والصور ومقاطع الفيديو كما نريد ، وتعطي نتيجة التنفيذ استجابة إيجابية مهما كانت الضوضاء أو عملية الضغط ... ، بحيث نستخدم بعض وظائف ماتلاب إلخ. تستخدم هذه الوظائف الموجات لذلك يمكننا القول أن المويجات فعالة في معالجة الإشارات بغض النظر عن التطبيقات الأخرى وهذا ما أثبتناه نتيجة التنفيذ بواسطة برنامج ماتلاب

الكلمات المفتاحية تردد وقت التعريب– مخطط– موازين––الأم الموجية

Résumé

Les ondelettes prend grande importance surtout ces dernières années grâce à la grande diversité de leurs domaines d'applications dans la communication. dans notre domaine il doit modifie tous ce qui est en traitement de signal comme des signaux ,images et vidéos comme nous voulent telque on utilise certains fonction matlab le résutat d'exécution donne répondu positivemet qeulque soit l'opération dé bruitage ou compression …etc ces fonctions utilisent des ondelettes donc on peut dire que les ondelettes est éfficace dans le traitement de signal sans tenir compte de ses autres application et ca ce que nous avons prouvé par le résultat d'exécution par matlab

Mots clés : localisation temps fréquence –scalogramme-les ondelettes-mères-échelles

Abstract

Wavelets have taken on great importance especially in recent years thanks to the great diversity of their fields of application in communication. in our field it must modify all that is in signal processing such as signals, images and videos as we want such that we use certain matlab functions the execution result gives a positive response whatever the noise or compression operation ... etc these functions use wavelets so we can say that wavelets is efficient in signal processing regardless of other applications and this is what we proved by the result of execution by matlab

Keywords : localization time frequency –scalogram-the mother wavelet-scales

Table de matières

1. Liste des figures ……....7

2. Liste des acronymes……...9

3.Liste des tableaux……..……..…10

4.Introduction générale……...11

Chapitre 1 Analyse multi-échelle……..….13

1.1. Analyse temps-fréquence et temps-échelle ……..…13

1.1.1 Limitations de l'analyse de Fourier……..…….....…13

1.1.2 Transformé de Fourier a court terme ……..14

1.1.3Transformation continu en ondelette ……..15

1.2 Base d'ondelette ……...…….19

1.2.1 Analyse multirésolution ……...……..…….19

1.2.2 Bases orthonormales d'ondelettes ……..…20

1.2.3 Ondelettes et bancs de filtres ……..……..……..…….21

1.2.4 Algorithme de Mallat ……...……...…….24

1.2.4.1 Décomposition ……..……..……..……..…24

1.2.4.2 Reconstruction ……..……..……..……...…26

1.2.4.3 Variante périodisée…….……..……..……27

1.2.4.4 Complexité…….……...…27

1.2.5 Propriétés des ondelettes……..……28

1.2.6 Familles d'ondelettes ……..……29

1.2.6.1 Ondelettes de Shannon-Nyquist ……..…29

1.2.6.2 Ondelettes de Haar……..……...…..……30

1.2.6.3 Ondelettes splines ……...32

1.2.6.4 Ondelettes de Daubechies……..……..…33

1.2.7 Ondelettes biorthogonales, « lifting » ……..……36

Chapitre 2 Paquets, trames et les bases multi résolution d'ondelettes…….40

2.1 Paquets d'ondelettes ……..……40

2.1.1 Bancs de filtres de structures quelconques……..…40

2.1.2 Arbres de décomposition……..……..……..……41

2.1.3 Localisation temps-fréquence……..…..……..……44
2.1.4 Ondelettes de Malvar……..…….……44
2.1.5 Choix de la meilleure base…….……...…….…..……45
2.1.5.1 Critères de choix……...…...……46
2.1.5.2 Algorithme de sélection…….……..…....…46
2.2 Trames d'ondelettes……....……48
2.3 Bases d'ondelettes multidimensionnelles……..…….…….…49
2.3.1 Analyses multi résolution séparable……...…….……49
2.3.2 Ondelettes en quinconce…….……..…...…54

Chapitre 3 applications au dé bruitage et à la compression ……....55

3.1 Application au Débruitage des signaux et des images…….…… 55
3.1.1 dé bruitage des signaux …….……..…...61
3.1.1.1 Seuil doux ou dur…….……61
3.1.1.2 Règles de sélection de seuil…..…….……..…62
3.1.1.3 Gérer le bruit non blanc……...…….....…64
3.1.2 Dé bruitage d'image……...…….……..…65
3.1.2.1 Générer une image bruitée……..……65
3.2 Conclusion……..……66
3.3 Compression d'images……...…….……66
3.3.1 Choix des filtres…….…….……67
3.3.2 Stratégies de codage…….……69
3.3.3 Compression vidéo……...……72
3.3.4 Standards de compression utilisant des ondelettes…….……73
3.4 Application à la compression d'images ……...……..……75
3.4.1 Chargement d'une image…….76
3.4.2 Méthode 1 : Seuil global…….....…..…76
3.4.3Méthode 2 : seuillage dépendant du niveau……..……78
3.5 Conclusion……..……79

5. Conclusion générale……..……..……..……80
6. Bibliographie…….……..…….……..……..……80

1. Liste des figures

Figure 1 localisation temps fréquence des fonctions d'une famille de Weyl-Heisenberg …..14

Figure.2 Exemple de transformations continues en ondelettes ……..……..16

Figure 3 Localisation temps-fréquence des ondelettes ($a_0 > a_1 > 0$)…….……..16

Figure.4 Signal considéré …….....17

Figure 5 Transformée en ondelettes du signal de la figure 4 représentée en niveaux de gris. (L'ondelette mère est ici un chapeau mexicain.)…….……17

Figure 6 Parties réelle et imaginaire de l'ondelette de Morlet pour ($2\pi\sigma\bar{f} = 5\ et\ \sigma = 1$)…18

Figure 7 Exemple d'AMR d'un signal …….....21

Figure 8 Projections sur les espaces de détails correspondant à l'analyse du signal de la figure 7……22

Figure 9 Banc de filtres d'analyse……..…….25

Figure 10 Structure de décomposition en ondelettes sur 3 niveaux de résolution……..26

Figure 11 Banc de filtres de synthèse……..26

Figure 12 Reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes……..…27

Figure13 AMRdeShannon − Nyquist : allures des fonctions$\varphi(t), \psi$(t),$H_0(f)$et $H_1(f)$…30

Figure 14 AMR de Haar : allures des fonctions $\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|$ Et $|H_0(f)|$……31

Figure 15 AMR de Franklin : allures des fonctions $\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|$ Et $|H_0(f)|$……..33

Figure 16 AMR spline cubique : allures des fonctions$\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|et|H_0(f)|$……33

Figure 17 AMR de Daubechies pour N = 2 : allures des fonctions$\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|$ Et $|H_0(f)|$……..…34

Figure 18 AMR de Daubechies pour N = 3 : allures des fonctions$\varphi(t)\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|$ Et$|H_0(f)|$…….34

Figure 19 AMR biorthogonale 9/7 : allures de l'ondelette d'analyse$\psi_1(t)$, de la fonction d'échelle associée $\varphi_1(t)$et de $|\bar{H}_0(f)|$et $|\bar{H}_1(f)|$…….……..36

Figure 20 AMR biorthogonale 9/7 : allures de l'ondelette de synthèse $\psi_2(t)$, de la fonction d'échelle associée $\varphi_2(t)$et de $|H_0(f)|$et $|H_1(f)|$…….37

Figure 21 Structure d'analyse en « lifting »……...……..…37

Figure 22 Structure de synthèse en « lifting »……...……..…38

Figure 23 Structure d'analyse avec 2 niveaux de « lifting » ……..……..38

Figure 24 Analyse en sous-bandes égales sur 3 niveauxde résolution…….……...41

Figure 25 Arbre associé à l'analyse en sous-bandes égales…….……42

Figure 26 Exemple de décomposition en paquets d'ondelettes…….……..…42

Figure 27 Arbre associé à la décomposition en paquets d'ondelettes de la figure 26…….42

Figure 28 Pavage du plan t-f à l'aide de paquets d'ondelettes .Cet exemple correspond à la décomposition de la figure 26 …….…….……43

Figure 29 Exemple de segmentation temporelle dyadique ……..……...44

Figure 30 Arbre associé à la segmentation de la figure 29……..….44

Figure 31 Pavage du plan t-f à l'aide d'ondelettes de Malvar .Cet exemple correspond à la segmentation de la figure 29 …….……...44

Figure 32 Calcul récursif des coefficients d'approximation dans une AMR 2D séparable …50

Figure 33 Banc de filtres d'analyse 2D séparab……..…51

Figure 34 Découpage approximatif du spectre 2D du champ$a_{j-1}[n,m]$ réalisé par un banc de filtres séparables……...51

Figure 35 Mise en oeuvre d'une AMR 2D séparable sur 3 niveaux de résolution……....51

Figure 36 Découpage approximatif du spectre 2D du champ $a_0[n,m]$ réalisé lors d'une AMR 2D séparable…… 52

Figure37 Luminance d'une image couleur comprimée d'un facteur 42 à l'aide de JPEG2000. La figure 37 donne la luminance de l'image originale……..52

Figure 38 Coefficients d'ondelettes et d'approximation de l'image de la figure 37disposés comme sur la figure 36 (mais ici dans le domaine spatial)……..52

Figure 39 Échantillonnage rectangulaire……...……..53

Figure 40 Échantillonnage en quinconce…….……...53

Figure 41 Exemple de débruitag…….....58

Figure 42 les graphes de Seuil doux et dur qui va obtenue par matlab à partir de signal d'origine……...61

Figure 43 les graphes de signal initial, bruité et dé bruité par matlab……...……62

Figure 44 le graphe de dé bruitage avec son signal d'origine qui obtenue par matlab…….63.

Figure 45 les images originals , bruité et dé bruité résultants sous matlab…….……65

Figure 46 Regroupement en arbres des coefficients d'ondelettes dans l'algorithme EZW (cas d'une décomposition sur 3 niveaux de résolution) ……..…….……..69

Figure 47 Ordre de balayage des sous-bandes dans l'algorithme EZW (cas d'une décomposition sur 3 niveaux de résolution)…….70

Figure 48 Luminance d'une image couleur comprimée d'un facteur 42 à l'aide de JPEG2000. La figure 37 donne la luminance de l'image originale……..……74

Figure 49-l'image qui on a chargé dans matlab ……..…….……75

Figure 50 l'affichage d'image compressé avec un global seuil=20 par matlab……...……76

Figure 51 l'affichage d'image obtenu par la méthode de seuillage dépendant du niveau par matlab……77

2. Liste des acronymes

AMR analyse multirésolution

AMR 1D analyse multirésolution monodimensionnels

RSB rapports signal sur bruit

SURE Stein's Unbiased Risk Estimate

MICD Modulation d'Impulsions Codées Différentiellement

TCD Transformée en Cosinus Discrète

EZW Embedded Zerotrees of Wavelet coefficients

JPEG Joint Picture Expert Group

MPEG Motion Picture Expert Group

ITU International Telecommunication Union

EBCOTE mbedded Block Coding with Optimized Truncation

ROI regions of interest

3. Liste des tableaux

Tableau 1 – Propriétés de symétrie liées à une décomposition en ondelettes splines orthogonales……..…32

Tableau 2 – Réponses implusionnelles des filtres passe-bas d'analyse et de synthèse bi orthogonaux 9/7……..……..……36

4. Introduction générale

Quand on cherche à analyser un signal, il est très fréquent qu'on établisse, de manière explicite ou implicite, une représentation temps-fréquence de ce signal. L'image qu'on peut avoir d'une telle opération est celle de la transcription d'une partition de musique, qui indique au musicien les notes (donc l'information fréquentielle) qu'il doit produire à un moment donné. La transformée de Fourier n'est pas l'outil approprié pour mener cette analyse puisqu'elle masque l'évolution temporelle du signal. Par contre, comme nous le montrerons, la transformée en ondelettes et ses extensions fournissent des solutions intéressantes dans ce contexte.les ondelettes sont issues de l'intuition d'un ingénieur en géophysique, J. Morlet,dans les années 1980. Sous l'impulsion de personnalités scientifiques tellesque le physicien A. Grossman [1] ou le mathématicien Y. Meyer [2], les ondelettes se sont imposées comme des outils fondamentaux de l'analyse harmonique moderne.

D'un point de vue applicatif, les ondelettes ont eu une influence importante dans divers domaines : physique, analyse numérique (par exemple, pour la résolution d'équations aux dérivées partielles), statistiques, traitement du signal et des images, vision par ordinateur

Dans le contexte de traitement du signal dans lequel nous nous placerons, le lien existant entre les décompositions en ondelettes et des outils plus traditionnels que sont les bancs de filtres, confère une certaine légitimité à ces transformations .signaux de manière logarithmique et constituent ainsi d'assez bonnes approximations du mode de fonctionnement des systèmes perceptuels visuel ou auditif humains. les ondelettes et les techniques multi résolution ont connu un grand succès en traitement d'images pour des problèmes tels que l'estimation de mouvement ,la reconnaissance de formes, la recherche dans des bases de données et la transmission progressive d'informations. La propriété essentielle qui est exploitée dans ces applications est la possibilité d'approximer les images à plusieurs échelles, en partant d'une vue « grossière » qu'on vient affiner au cours de traitement successifs.

Dans le premier chapitre, on commence d'abord par l tout ce qui concerne de l'analyse de Fourier ensuite , nous présenterons les différentes formes de transformations en ondelettes

existant .telque on distinguerons les transformations continues en ondelettes puis on parlons sur les décompositions parcimonieuses qui explique bases d'ondelettes orthogonales ou bi orthogonales et les différents types d'ondelette(Shannon-Nyquist, Haar, splines, Daubechies) par détaillé pour chacun qui sont ils. et à la fin de chapitre on toucherons pour les Ondelettes bi orthogonales, « lifting ».

On poursuit la mémoire dans le deuxième chapitre en parlons sur les Paquets d'ondelettes qui est explique les Bancs de filtres de structures quelconques, Arbres de décomposition et aussi le Localisation temps-fréquence et Ondelettes de Malvar puis la méthode qui est suie le pour Choisir de meilleure base puis on explique les Trames d'ondelettes, finalement on parlons sur les Bases d'ondelettes multidimensionnelles (Analyses multi résolution séparables et Ondelettes en quinconce).

Et finalement, on termine par le dernier chapitre qui constitue le cœur de notre travail de projet c'est faire l'élimination de bruit sur les signaux et les Images et on compresser des Images à partir les chargements qui sont basent sur le seuillage sous le programme matlab avec des explications théoriques.

Chapitre 1
Analyse multi-échelle

1.1. Analyse temps-fréquence et temps-échelle :

1.1.1 Limitations de l'analyse de Fourier :

Considérons un signal $s(t)$ à temps continu que nous supposerons d'énergie finie :

$$\|s\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt \quad (1.1)$$

Un outil traditionnel d'analyse de ce signal est sa transformée de Fourier définie par :

$$S(f) \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} \, dt \qquad (1.2)$$

Cette transformation fait clairement ressortir le contenu fréquentiel de $s(t)$ mais ne permet pas aisément de localiser temporellement les événements (impulsions, sauts, changements de fréquence…) qui surviennent dans le signal. Pour mieux comprendre ce phénomène, on peut réécrire la transformée de Fourier sous la forme :

$$S(f) = < s, e^{i2\pi ft} > \quad (1.3)$$

Où la notation $< b_1, b_2 >$ désigne de façon formelle le produit scalaire de deux signaux $b_1(t)$ et $b_2(t)$:

$$< b_1, b_2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} b_1(t) \, b_2^*(t) dt \qquad (1.4)$$

$b_2^*(t)$désignant le complexe conjugué de $b_2(t)$.

Ce produit scalaire est de module maximal quand ces signaux sont égaux, à un facteur d'amplitude près. On voit ainsi que la valeur de $|S(f)|$ permet, en quelque sorte, d'évaluer le degré de ressemblance entre le signal $s(t)$ et la cisoïde $e^{i2\pi ft}$. Cette dernière fonction correspond à une « fréquence pure » et donc est idéale pour mener une analyse spectrale, mais elle oscille sur tout l'axe temporel avec la même amplitude et n'a donc aucun pouvoir de localisation temporelle. Pour pallier cette limitation, il faut construire des représentations faisant intervenir conjointement le temps et la fréquence

1.1.2Transformé de Fourier a court terme :

Une première approche consiste à recourir à une transformation de Fourier à court terme du signal. L'analyse de Fourier est alors restreinte à une portion du signal délimitée par une fenêtre$g(t)$, lisse et bien localisée autour de l'instant t=0, qu'on fait glisser au long de l'axe temporel. La transformation ainsi obtenue s'exprime par :

$$S_C(v,b) = \int_{-x}^{+x} s(t)g^*(t-b)e^{-2\pi vti}dt$$

$$=< s, g^*(t-b)e^{i2\pi vt} > \quad (1.5)$$

La quantité $|S_C(v,b)|^2$ est appelé spectrogramme de $s(t)$et fournit une indication sur la quantité d'énergie présente dans le signal autour de la fréquence v et de l'instant b.

Quand on analyse un signal, il est important de connaître les localisations en temps et en fréquence des fonctions sur lesquelles on le décompose. Dans le cas présent, ces fonctions appartiennent à la famille (dite de Weyl-Heisenberg) $\{g(t-b)e^{i2\pi vt}, (v,b) \in R^2\}$. la fonction g (t) peut être caractérisée par deux intervalles [-$\frac{\Delta t}{2}$,$\frac{\Delta t}{2}$]et[$-\frac{\Delta f}{2}$,$\frac{\Delta f}{2}$]Qui contiennent 90% de l'énergie de cette fonction dans le domaine temporel et, respectivement, fréquentiel. Ces intervalles définissent un pavé du plan temps-fréquence. En translatant g (t) de b en temps,on induit simplement un déplacement de b de ce pavé suivant l'axe temporel, alors que la modulation par $e^{2\pi nti}$ correspond à un déplacement de n de ce pavé suivant l'axe fréquentiel (figure **1**). Compte tenu du principe d'incertitude de Gabor-Heinsenberg [3], il est impossible d'avoir à la fois une localisation parfaite en temps et enfréquence (c'est-à-dire un pavé réduit à un point). On peut également montrer que les fenêtres conduisant à la meilleure localisation temps-fréquence possible sont de forme gaussienne. Lorsque des fenêtres de ce type sont choisies, on parle d'analyse de Gabor.

Signalons que la transformée de Fourier à court terme fournit une représentation complète du signal, en ce sens qu'on peut l'inverser à l'aide de la formule suivante :

$$s(t) = \frac{1}{\|g\|^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} S_C(v,b)g(t-b)e^{2\pi vti}dv\,db \quad (1.6)$$

Dans une version discrète de la transformée de Fourier à court terme, la fréquence prend des valeurs uniformément réparties :$v = mv_0, m \in Z$de même que le temps : $b = nb_0, n \in Z$Pour un n fixé, les coefficients :

$$S_{Cd}(m,n) = \int_{-x}^{+x} s(t)g^*(t-nb_0)e^{-2\pi mv_0 ti}dt \quad (1.7)$$

Caractérisent le contenu fréquentiel de $s(t)$dans un voisinage de nb_0. En faisant varier n, on analyse le signal au cours du temps et l'ensemble des coefficients $S_{Cd}(m,n)$ pour

$(m,n) \in Z^2$nous permettent de le reconstruire quand $b_0 v_0 \leq 0$ (sous certaines conditions sur g(t)) [4].

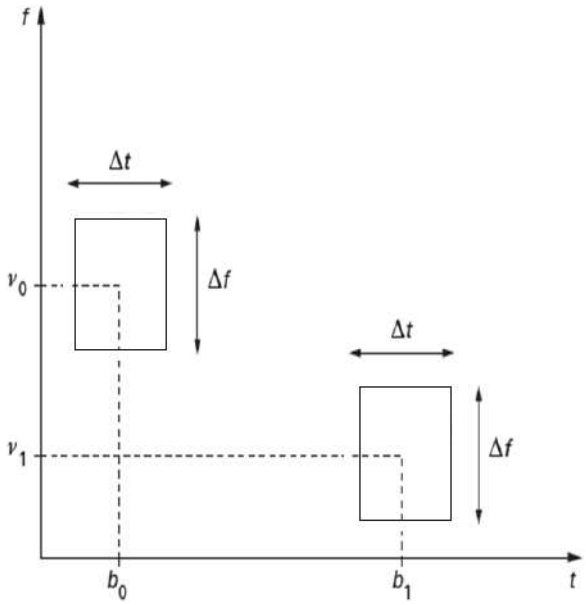


Figure 1 localisation temps fréquence des fonctions d'une famille de Weyl-Heisenberg

1.1.3Transformation continu en ondelette :

La transformée en ondelettes constitue une alternative à l'analyse temps-fréquence que nous venons de décrire. La transformée continue en ondelettes est donnée par[5] :

$$C_{a,b} = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, \psi^*\big(a(t-b)\big)dt \ ,a \neq 0 \quad (1.8)$$

Où $\psi(t)$ est une fonction d'énergie finie.

La quantité $\left|C_{a,b}\right|^2$ est appelée scalogramme de s(t). Si l'on compare les formules (1,2) et (1,4), on observe que la famille de fonctions $\{\sqrt{|a|}\psi(\, a(t-b))\}$ se substitue ici à la famille de Weyl-Heisenberg. Cette famille de fonctions est formée de dilatées/contractées (selon que $|a| < 1$ ou$|a| > 1$) et translatées de $\psi(t)$(figure **2**).

On dit qu'il s'agit d'une famille d'ondelettes dont $\psi(t)$ est l'ondelette mère.Notons que le facteur$\sqrt{|a|}$ joue seulement le rôle d'un terme de normalisation assurant que chaque ondelette de la famille est de même énergie $\|\psi(t)\|^2$

Supposons que $\psi(t)$ soit associée au pavé dans le demi-plan temps-fréquence correspondant aux fréquences positives, étant la fréquence moyenne sur le demi-axe des fréquences positives. L'ondelette$\sqrt{|a|}\psi(\, a(t-b))\}$ est localisée temporellement autour de l'instant b,qui est appelé paramètre de localisation.

Quand a varie, l'ondelette change d'échelle, ce qui lui permet decouvrir différentes bandes de fréquence. Par exemple, si $a > 1$, la contractée de l'ondelette mère $\psi(at)$ a un support plus étalé en fréquence, et plus étroit en temps.

Une valeur élevée de $|a|$ correspond à des échelles fines ou à des hautes fréquences alors qu'une faible valeur correspond à des échelles grossières ou à de basses fréquences (figure **3**). Le paramètre $\frac{1}{a}$ est appelé facteur d'échelle.

L'analyse temps-échelle ainsi obtenue se révèle souvent mieux adaptée aux caractéristiques des signaux naturels et à notre façon de les percevoir, que celle fournie par la transformée de Fourier à court terme. La figure **5** montre un exemple de transformation en ondelettes d'un signal élémentaire représenté sur la figure **4**.

Une propriété importante de la transformée en ondelettes est quelle signal peut être reconstruit à partir de $C_{a,b}$, en employant la relation suivante :

$$s(t) = \frac{1}{K_\psi} \int_{-x}^{+x} \int_{-x}^{+x} C_{a,b} \sqrt{|a|} \psi\big(a(t-b)\big) da\, db \quad (1.9)$$

$$K_\psi = \int_{-x}^{+x} \frac{|\psi(f)|^2}{|f|} df \qquad (1.10)$$

$\psi(f)$ étant la transformée de Fourier de l'ondelette mère. La formule d'inversion (1.9) nécessite que la constante K_ψ soit finie. Cette dernière condition (dite d'admissibilité) implique que:

$$\psi(0) = 0 = \int_{-x}^{+x} \psi(t) dt \qquad (1.11)$$

ce qui signifie que l'ondelette mère est de « moyenne » nulle.

Parmi les choix usuels pour la fonction $\psi(t)$, mentionnons :

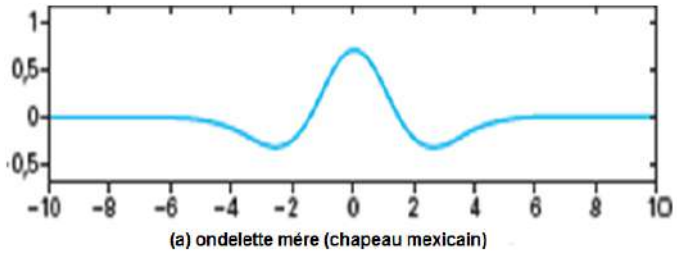
- le chapeau mexicain :

$$\psi(t) = \frac{2}{\frac{1}{\pi^4}\sqrt{3\sigma}} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) exp^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \sigma > 0. \quad (1.12)$$

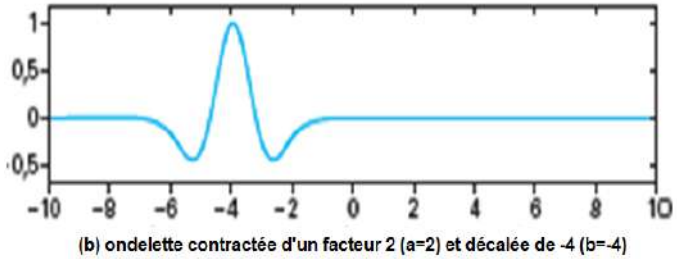
- l'ondelette de Morlet :

$$\psi(t) = \frac{1}{\frac{1}{\pi^4}\sqrt{\sigma}} \exp\left(\frac{t^2}{2\sigma^2} + i2\pi\bar{f}t\right) . \sigma > 0 \quad (1.13)$$

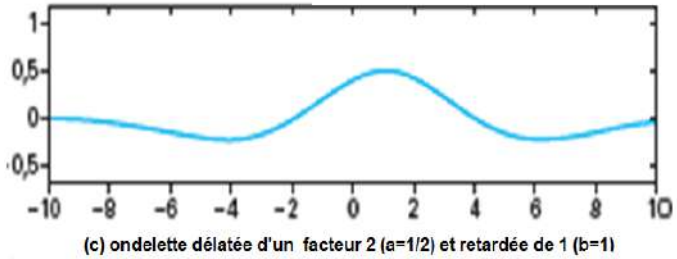
La première ondelette est rigoureusement admissible alors que la seconde l'est approximativement quand le produit $\sigma\bar{f}$est grand (typiquement) $2\pi\sigma\bar{f} = 5$.



(a) ondelette mére (chapeau mexicain)



(b) ondelette contractée d'un facteur 2 (a=2) et décalée de -4 (b=-4)



(c) ondelette délatée d'un facteur 2 (a=1/2) et retardée de 1 (b=1)

Figure.2 Exemple de transformations continues en ondelettes

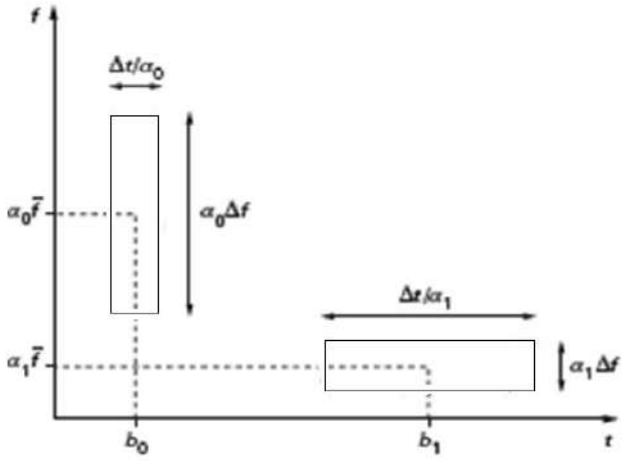


Figure 3 Localisation temps-fréquence des ondelettes ($a_0 > a_1 > 0$)

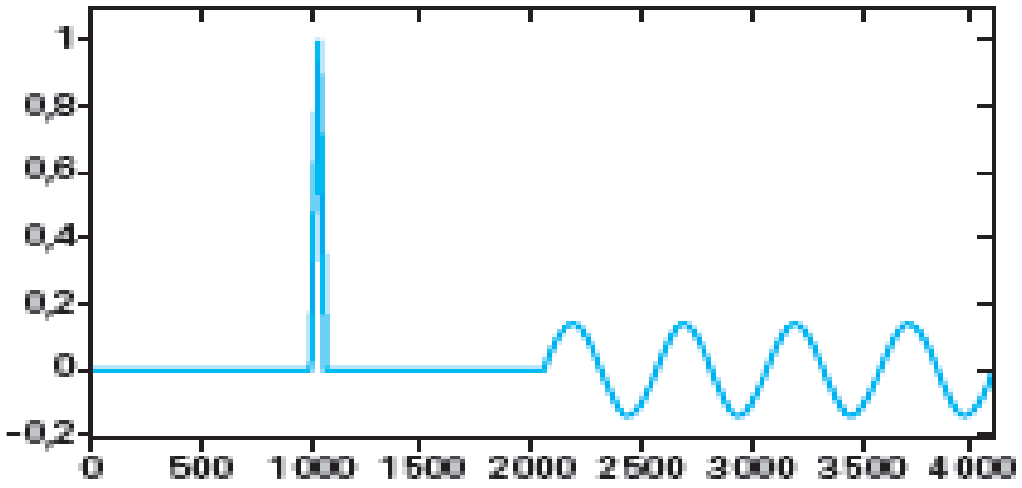


Figure.4 Signal considéré

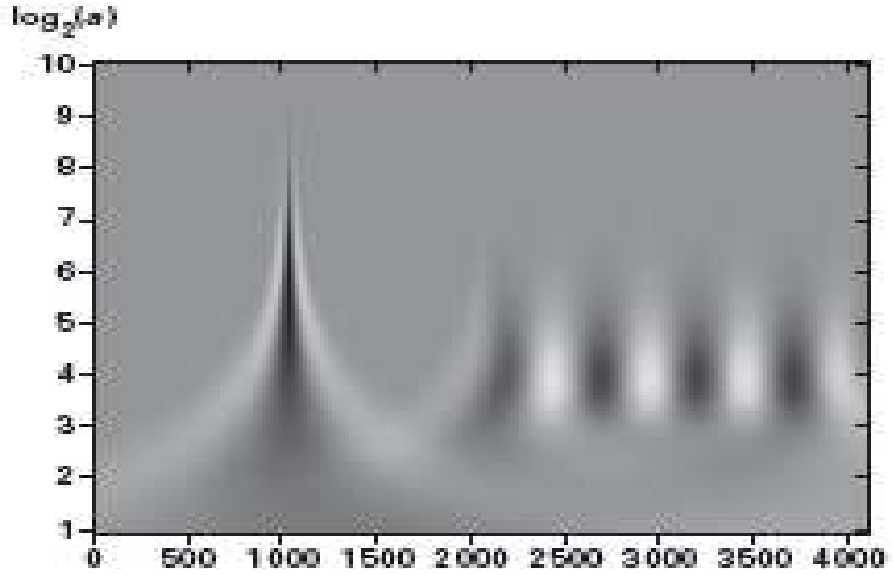


Figure 5 – Transformée en ondelettes du signal de la figure 4 représentée en niveaux de gris. (L'ondelette mère est ici un chapeau mexicain.)

Le graphe du chapeau mexicain est tracé sur la figure **2a** pour$\sigma = 3/2$, et celui de l'ondelette de Morlet est donné par la figure **6**.L'équation (1.9) permet d'exprimer $s(t)$ en fonction des ondelettes.

Cette représentation intégrale fait intervenir les ondelettes correspondant à toutes les localisations temporelles et à tous les facteurs d'échelle, ce qui la rend difficile à mettre en oeuvre. À cet égard, il serait plus commode de disposer d'un développement du signal sur un ensemble dénombrable d'ondelettes. Nous allons voir que cela est possible si l'on fait varier le facteur d'échelle de façon dyadique, en choisissant $a=2^{-j}, j \in Z$, et si l'on prend

$b = k2^j, k \in Z$.Nous allons pour cela revenir sur la notion d'analyse à plusieurs échelles ou multi résolution

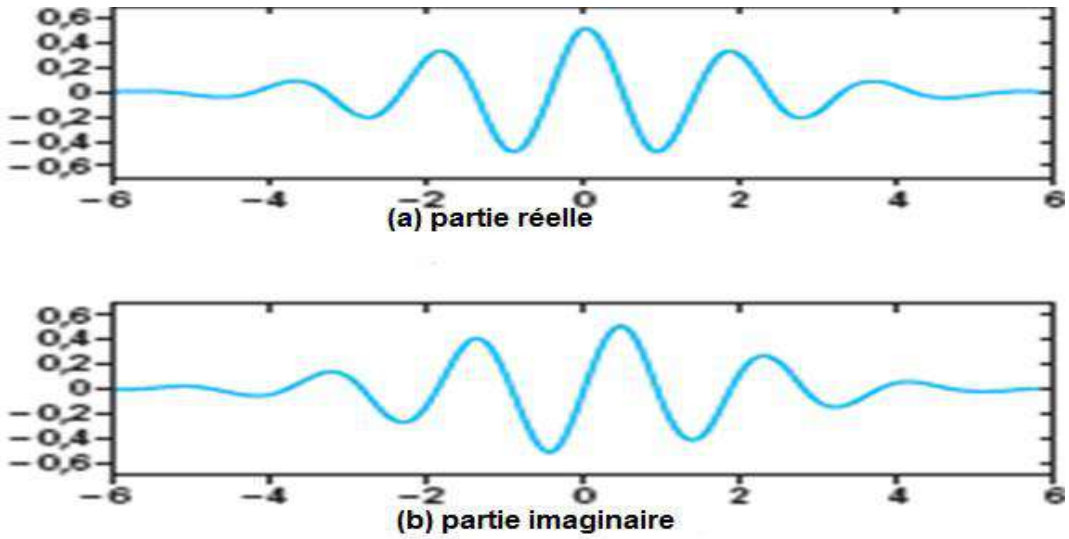


Figure 6 Parties réelle et imaginaire de l'ondelette de Morlet pour ($2\pi\sigma\bar{f} = 5\ et\ \sigma = 1$)

1.2 Base d'ondelette

1.2.1 Analyse multi résolution :

Lorsqu'un cameraman effectue un « zoom », il part d'une vision globale des choses, que nous qualifierons d'approximation grossière, pour se focaliser sur une zone d'intérêt, en faisant apparaître en plus de détails par rapport à la première image. Voyons comment formaliser ce type d'approximation multi résolution [6], en nous plaçant dans l'espace $L^2(R)$ des signaux d'énergie finie, muni du produit scalaire (1.4)

Définition**.** Une analyse multi résolution (AMR) de est une suite de sous-espaces vectoriels (fermés) de $L^2(R)$ Vérifiant les conditions suivantes :

1.$(V_j)_{j\in Z}$ constitue une suite d'espaces emboîtés :

$$\forall\, j \in Z \ , V_{j+1} \subset V_j \qquad (1.14)$$

2.$\lim_{j\to\infty} V_j = \{0\}$, $\lim_{j\to-\infty} V_j$est dense dans $L^2(R)$.

3. Une fonction $s(t)$ appartient à V_j si et seulement si sa dilatée $s(t/2)$ appartient à V_{j+1}.

4. Il existe$\varphi(t) \in L^2(R)$, appelée fonction d'échelle ou ondelette père telle que

$\{\varphi(t-k), k \in Z\}$ forme une base ortho-normal de V_0.

Dans ce contexte, l'AMR d'un signal $s(t)$de $L^2(R)$ consiste à calculer les projections orthogonales de $s(t)$ sur les espaces $V_j, j \in Z$.

Donnons maintenant quelques explications intuitives concernant cette définition ainsi que certaines de ses conséquences :

- ✓ la relation d'inclusion (1.14) nous indique que V_{j+1} est un sous espace de V_j. Ainsi, la projection d'un signal sur V_{j+1} constitue nécessairement une moins bonne approximation de ce signal que sa projection sur V_j . Par ailleurs, la relation (1.16) peut être interprétée comme une propriété de causalité qui montre quel approximation sur V_j contient toute l'information nécessaire pour calculer l'approximation sur V_{j+1} ;
- ✓ les conditions 2 signifient que, quand j tend vers ∞ , on perd toutes les informations sur le signal alors que, quand j tend vers –-∞, l'approximation est asymptotiquement égale au signal d'origine ;
- ✓ d'après la condition 3, on passe deV_j à V_{j+1}en multipliant par 2 le facteur d'échelle. Pour cette raison, j est appelé niveau de résolution. Par récursivité, on déduit facilement de cette propriété que, quel que soit $\in Z$, $s(t)$ appartient à V_0 si et seulement si $s(\frac{t}{2^j})$ appartient à V_j :
- ✓ de plus, la condition 4 implique que, pour tout $j \in Z$, l'espace est invariant par translation d'un multiple de 2^j :

$$\forall\, k \in Z,\ s(t) \in V_j \rightarrow s\left(t - k2^j\right) \in V_j, \qquad (1.15)$$

Les deux derniers résultats se traduisent par le fait que

$$\{2^{-\frac{j}{2}}\varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right), k \in Z\} \qquad (1.16)$$

constitue une base ortho normale de V_j.

1.2.2 Bases ortho normales d'ondelettes

L'AMR d'un signal $s(t)$ consiste donc à réaliser de projections successives $proj_{V_j}s(t)$ du signal sur les espaces V_j , ce qui conduit à des approximations de plus en plus grossières des(t), au fur et à mesure que j croît. La différence entre deux approximations consécutives,$proj_{V_j}s(t)$Et $proj_{V_{j-1}}s(t)$, représente l'information de« détails », qui existait à l'échelle 2^{j-1}et qui est perdue à l'échelle 2^j. Cette information est contenue dans le sous-espace W_j orthogonal à V_j tel que :

$$V_{j-1} = W_j \oplus V_j \qquad (1.17)$$

où le symbole $\oplus$ désigne la somme directe de sous-espaces vectoriels.

La projection orthogonale $proj_{W_j}s(t)$du signal sur ce sous espace donne l'information de « détails » au niveau de résolution j.

Compte tenu de la relation (1.17), la projection sur V_{j-1} peut être décomposée en la somme des projections sur V_j etW_j :

$$proj_{V_{j-1}}s(t) = proj_{V_j}s(t) + proj_{W_j}s(t) \quad (1.18)$$

Les figures **7** et **8** illustrent ces concepts pour une forme particulière de $s(t)$

Un point essentiel est qu'il existe une ondelette mère $\psi(t)$ telleque

$\{2^{-j/2}\psi\left(\frac{t}{2^j}-k\right), k \in Z\}$ soit une base orthonormale de W_j. Par ailleurs, en considérant l'union de toutes ces familles de fonctions quand j varie, et en exploitant la condition 2 de l'AMR, on peut montrerque $\{2^{-\frac{j}{2}}\psi\left(\frac{t}{2^j}-k\right), (j,k) \in Z^2\}$ est une base orthonormale de $L^2(R)$. Par le biais de l'AMR, on peut donc construire des bases ortho normales d'ondelettes de $L^2(R)$.

1.2.3 Ondelettes et bancs de filtres :

La propriété d'inclusion (1.14) implique que V_1 est un sous-espace vectoriel de V_0 . Par conséquent, on peut écrire toute fonction de V_1comme une combinaison linéaire des fonctions $\varphi(t-l), l \in Z$, qui forment une base de V_0. Étant donné que $2^{-\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \epsilon V_1$, on en déduit qu'il existe une suite $(h_0[l])_{l\in Z}$telle que :

$$2^{-\frac{1}{2}}\ \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{l=-\infty}\ h_0[l]\ \varphi(t-l) \quad (1.19)$$

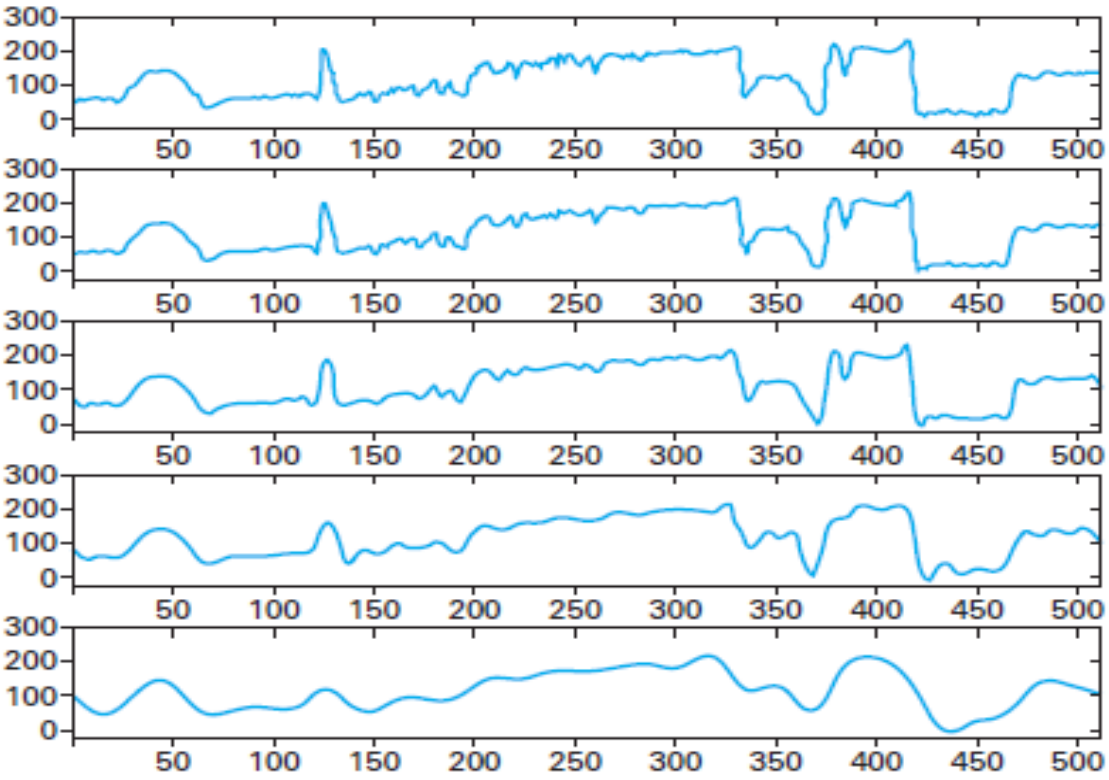
Le caractère ortho normal de la famille $\{\varphi(t-l), l \in Z\}$ nous permet alors d'obtenir comme expression des coefficients $h_0[l]$:

L'équation (1.17) est appelée équation à 2 échelles car elle lie la dilatée d'un facteur 2 de $\varphi(t)$ à des translatées de cette fonction. Par simple changement de variables dans (1.19), on obtient, de façon plus générale ,une équation à 2 échelles entre les niveaux de résolution j et $j+1$:

$$\forall k \in Z, \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}}\varphi\left(\frac{t}{2^{j+1}}-k\right) = \sum_{l=-\infty}\ h_0[l-2k]\frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\varphi\left(\frac{t}{2^j}-l\right) \quad (1.20)$$

La suite $(h_0[l])_{l\in Z}$ peut être interprétée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre qui joue un rôle fondamental dans la caractérisation d'une AMR. La réponse fréquentielle de ce filtre est la transformée de Fourier de $(h_0[l])_{l\in Z}$

$$H_0(f) = \sum_{l=-\infty}\ h_0[l]\, e^{-j2\pi fl} \quad (1.21)$$



En allant du haut vers le bas sont représentés : le signal, puis ses approximations $\text{proj}_{V_1} s(t)$, $\text{proj}_{V_2} s(t)$, $\text{proj}_{V_3} s(t)$ et $\text{proj}_{V_4} s(t)$.

Figure 7 Exemple d'AMR d'un signal

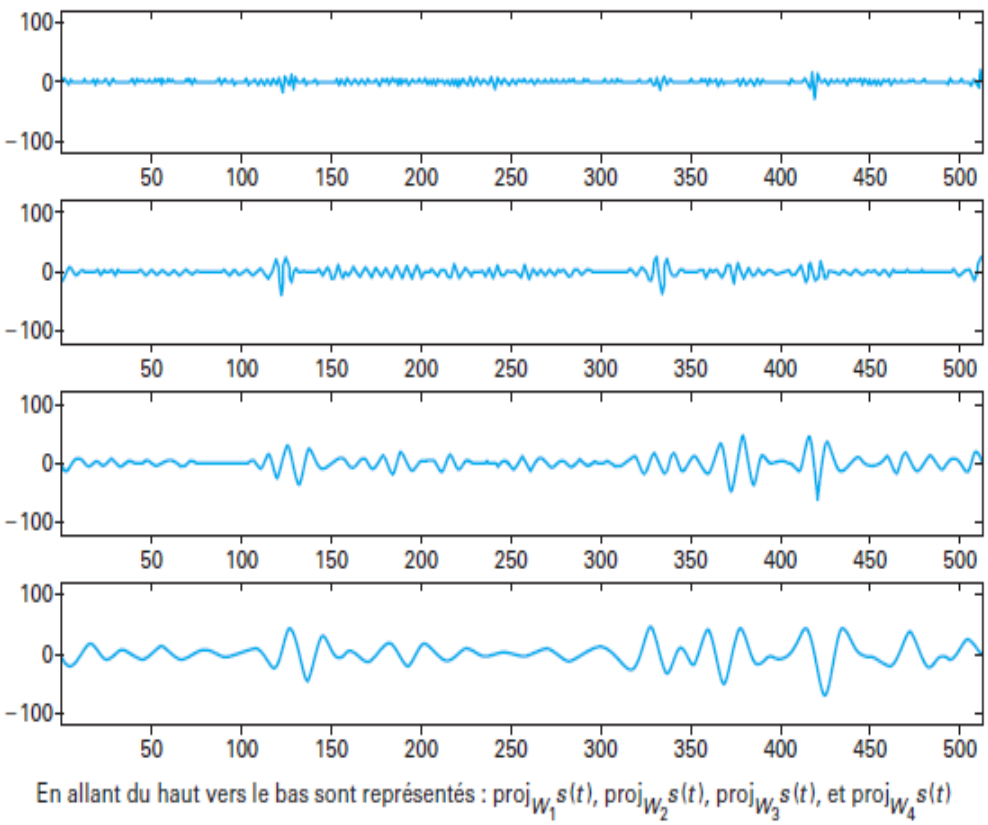


Figure 8 Projections sur les espaces de détails correspondant à l'analyse du signal de la figure 7

Cette réponse fréquentielle est une fonction périodique, de période 1, qui est soumise à certaines restrictions. Ainsi, on peut montrer que :

$$H_0(0) = \sqrt{2} \qquad (1.22)$$

Une autre propriété importante, qui est une conséquence de l'orthonormalité de la famille $\{\varphi(t-l), l \in Z\}$ est la suivante :

$\forall f \in [0.1], |H_0(f)|^2 + |H_0(f+1/2)|^2 = 2$ (1.23) On peut par ailleurs vérifier (voir [6] pour plus de précisions) que,une fois le filtre choisi, on obtient une unique fonction d'échelle dont la transformée de Fourier est donnée par :

$$\emptyset(f) = \prod_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} H_0\left(\frac{f}{2^p}\right)\right) \qquad (1.24)$$

On peut raisonner sur les espaces de détails W_j de la même façon que nous l'avons fait sur les espaces d'approximation V_j

Les ondelettes

$$\{2^{-\frac{j+1}{2}}\psi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right), k \in Z \qquad (1.25)$$

qui forment une base de $W_{j+1} \subset V_j$, peuvent ainsi être décomposées sur la base ortho normale $\{2^{-\frac{j}{2}}\varphi\left(\frac{t}{2^j}-l\right), l \in Z\}$ de V_j selon larelation :

$$\forall\, k \in Z,\ \ 2^{-\frac{j+1}{2}}\psi\left(\frac{t}{2^{j+1}}-k\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1[l-2k]\frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\varphi\left(\frac{t}{2^j}-l\right) \quad (1.26)$$

La suite$(h_1[l])_{l\in Z}$s'interprète aussi comme la réponse impulsionnelle d'un filtre. L'ortho normalité de la famille

$$\{k \in Z,\ \ 2^{-\frac{j+1}{2}}\psi\left(\frac{t}{2^{j+1}}-k\right)\} \quad (1.27)$$

se traduit par une condition similaire à (1.23) sur la réponse fréquentielle $H_1(f)$ de ce filtre :

$$\forall f \in [0.1],\ |H_1(f)|^2 + |H_1(f+1/2)|^2 = 2 \quad (1.28)$$

alors que l'orthogonalité des sous-espaces V_{j+1} et W_{j+1}de V_j équivaut à :

$$\forall f \in [0.1],\ H_0(f)H_1^*(f) + H_0(f+1/2)H_1^*(f+1/2) = 0 \quad (1.29)$$

Les relations (1.23), (1.25) et (1.26) peuvent être réunies en une seule condition qui est celle de para-unitarité. Cette dernière s'exprime par le fait que la matrice

$$M(f) = \begin{bmatrix} H_0(f) & H_1(f) \\ H_0(f+1/2) & H_1(f+1/2) \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

est unitaire, pour tout$f \in [0.1[$(ce qui signifie que la somme des modules au carré des éléments sur chaque colonne/ligne de la matrice est égale à 1 et que le produit scalaire des colonnes /lignes est nul). Si l'on considère la première ligne de la matrice $M(f)$ on a :

$$\forall f \in [0.1],\ |H_0(f)|^2 + |H_1(f)|^2 = 2 \quad (1.31)$$

ce qui, combiné à (1.22), implique que :

$$H_1(0) = 0 \quad (1.32)$$

Les conditions (1.22) et (1.27) suggèrent que les filtres de réponses impulsionnelles $(h_1[l])_{l\in Z}$ et$(h_0[l])_{l\in Z}$ doivent être respectivement passe-bas et passe-haut.

1.2.4 Algorithme de Mallat

1.2.4.1 Décomposition

Dans le cadre que nous venons de décrire, la décomposition en ondelettes orthogonales d'un signal $s(t)$ peut être effectuée de manière très efficace. Pour cela, on détermine, à chaque niveau de résolution j, les approximations $proj_{V_j}s(t)$ et les informations de détails $proj_{W_j}s(t)$du signal. Les familles $\{2^{-\frac{j}{2}}\varphi\left(\frac{t}{2^j}-k\right), k \in Z\}$ et$\{k \in Z,\ \ 2^{-\frac{j}{2}}\psi\left(\frac{t}{2^j}-k\right)\}$ étant des bases ortho normales respectives des espaces $V_j$et W_j , on a :

$$proj_{V_j} s(t) = \sum_{k=-}^{\infty} a_j[k] 2^{-\frac{j}{2}} \varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \quad (1.33)$$

$$proj_{W_j} s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_j[k] 2^{-\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \quad (1.34)$$

Avec

$$a_j[k] =< s(t), 2^{-\frac{j}{2}} \varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) > \quad (1.35)$$

$$c_j[k] =< s(t), 2^{-\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) > \quad (1.36)$$

Les coefficients $a_j[k]$ et$c_j[k]$ sont appelés respectivement coefficients d'approximation et coefficients d'ondelettes (ou de détails) du signal, au niveau de résolution j.

Il serait lourd de calculer directement l'ensemble des produits scalaires (1.35) et (1.36) par intégration sur R.Fort heureusement, les équations à 2 échelles permettent de mettre en évidence des relations récursives qui simplifient ces calculs. Plus précisément, en combinant (1.37) et (1.30),on vérifie aisément que :

$$a_j[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-1}[l]\, h_0^*[l - 2k] \quad (1.37)$$

Et, de façon similaire, on a :

$$c_j[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-1}[l]\, h_1^*[l - 2k] \quad (1.38)$$

On à partir des coefficients d'approximation du signal à une échelle données 2^{j-1}, on peut ainsi déterminer ses coefficients d'approximation et d'ondelettes à l'échelle deux fois plus grande. Les équations (1.37) et (1.38) définissent les opérations à réaliser à chaque niveau de résolution : un traitement par le filtre de réponse impulsionnelle $(\bar{h}_0[l])_{l\in Z} = (h_0^*[-l])_{l\in Z}ou(\bar{h}_1[l])_{l\in Z} = (h_1^*[-l])_{l\in Z}$,suivi d'une décimation (appelée aussi sous-échantillonnage) d'un facteur 2. En effet, soit $\bar{a}_j[k]$ le signal à temps discret obtenu par convolution de $a_{j-1}[k]$ et $\bar{h}_0[k]$, après décimation, il ne subsiste qu'un échantillon sur 2 de cette suite, ce qui conduit à $a_j[2k] = \bar{a}_j[2k]$ De la même manière, on a, en sortie du second filtre :

$$\bar{c}_j[k] = \sum_{l=-\infty} a_{j-1}[l] h_1^*[l - k] \quad (1.39)$$

et, à la suite de la décimation, on obtient $\bar{c}_j[2k] = c_j[k]$. Ces opérations permettent le passage du niveau de résolution $j - 1$ au niveau de résolution j. Elles sont résumées sur la figure **9**, où 2↓symbolise l'opération de décimation d'un facteur 2. La structure représentée constitue un banc de filtres d'analyse en quadrature miroir [7].

Comme le montre la figure **10**, la mise en cascade de ces bancs de filtres conduit à une décomposition du signal sur plusieurs niveaux de résolution. L'algorithme décrit nécessite cependant de disposer des coefficients d'approximation à un niveau de résolution initial, pris

par convention égal à 0. Ces coefficients peuvent se calculer à l'aide de la relation (1.35) mais, dans la pratique, on se contente souvent de les approximer par des valeurs obtenues après échantillonnage régulier du signal analysé [8]. À l'issue de la décomposition,on obtient les coefficients d'approximation du signal au niveau de résolution j_{max} correspondant à l'échelle la plus grossière jusqu'où l'analyse a été poussée. Par ailleurs, on génère les coefficients d'ondelettes à tous les niveaux de résolutions $\in \{1, \ldots\ldots, j_{max}\}$.

Si les coefficients d'approximation au niveau de résolution 0 forment une suite de K valeurs, il semble cohérent de choisir j_{max} strictement inférieur à $\log_2(K) + 1$.

1.2.4.2 Reconstruction

Dans la pratique, ces coefficients sont généralement traités (par exemple, il peuvent être transmis de façon progressive sur un canal de télécommunication). Après cela, il est souvent nécessaire de reconstituer le signal original ou, plus exactement, une version« traitée » de ce dernier. On emploie à cette fin un banc de filtres de synthèse(cf. figure **11**) qui réalise les opérations duales de celles effectuées lors de l'analyse : une interpolation d'un facteur 2 de l'entrée de chaque canal, puis un filtrage. L'interpolation, qu'on symbolise par 2↑, consiste à intercaler un zéro entre 2 échantillons consécutifs du signal d'entrée. Par exemple, en interpolant($a_j[k]$)$_{k\in Z}$, on obtient **:**

$$\hat{a}_j[k] = \begin{cases} a_j[k/2] \; si \;\; k \; est \; pair \\ 0 \quad sinon \end{cases} \qquad (1.40)$$

Les filtres de synthèse sont de réponses impulsionnelles($h_1[l]$)$_{l\in Z}$Et ($h_0[l]$)$_{l\in Z}$

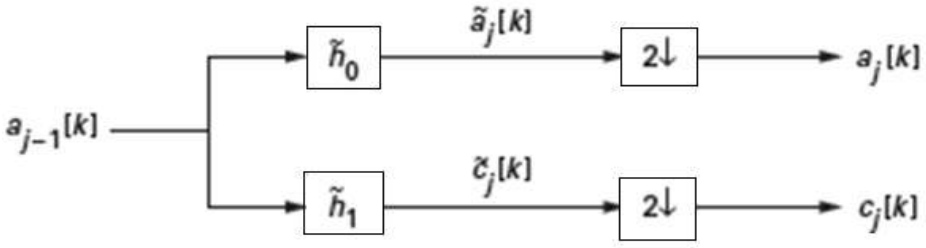


Figure 9 Banc de filtres d'analyse

La formule permettant de revenir à une échelle plus fine, en passant du niveau de résolution j au niveau de résolution$j-1$, est alors donnée par :

$$a_{j-1}|k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_0[k-2l]a_j[l] + \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1[k-2l]c_j[l] \qquad (1.41)$$

La figure **12** donne le schéma d'inversion de la décomposition de la figure 10

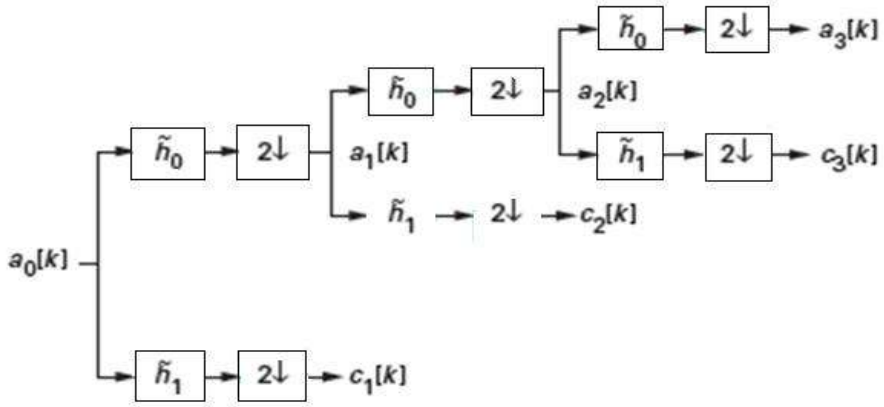


Figure 10 Structure de décomposition en ondelettes sur 3 niveaux de résolution

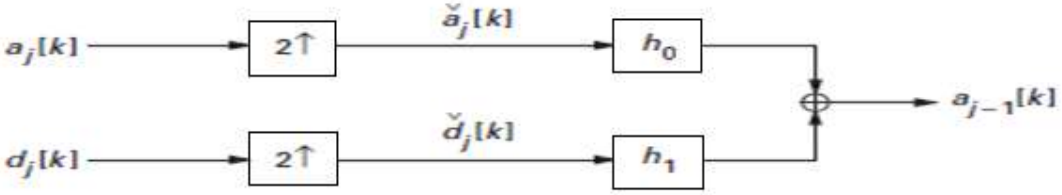


Figure 11 Banc de filtres de synthèse

1.2.4.3 Variante périodisée

On remplace parfois l'opération de convolution mise en œuvre dans les filtres des figures **9** et **11** par une convolution périodique (ou cyclique). L'avantage est que, partant de K valeurs discrètes, ongénère au niveau de résolution $j \in \{1, \ldots., j_{max}\}$ exactement $K2^{-j}$coefficients $d_j[k](ou\ a_j[k]$, si K est multiple de $.2^{j_{max}}$ Cependant, on ne réalise plus à proprement parler une AMR de $L^2(R)$. Il s'agit d'une décomposition en ondelettes périodiques.

1.2.4.4 Complexité

Si des filtres de réponses impulsionnelles finies, de faible longueur L, sont employés, on peut montrer que cette méthode récursive requiert environ $2KL$ opérations élémentaires (additions et multiplications confondues) pour décomposer ou reconstruire un signal de longueur K. En terme de complexité de calculs, elle apparaît donc comme une méthode compétitive par rapport à une transformée de Fourier rapide directe ou inverse [9].

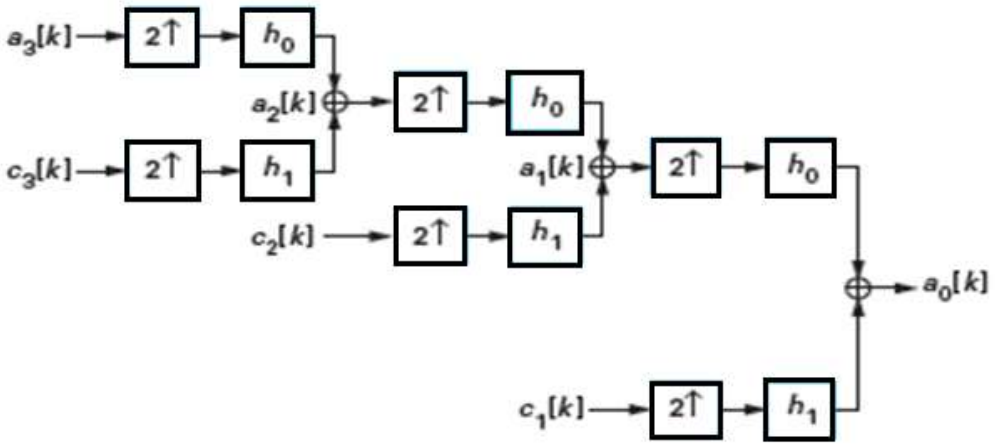


Figure 12 Reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes

1.2.5 Propriétés des ondelettes

Supposons que l'on dispose d'une AMR de $L^2(R)$ de fonction d'échelle $\varphi(t)$. Conformément à la relation (1.26) (en fixant $j = -1$ et $k = 0$), une façon simple de définir l'ondelette mère consiste à prendre

$$\psi(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1[l]\sqrt{2}\varphi(2t-l) \leftrightarrow \psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1\left(\frac{f}{2}\right)\emptyset\left(\frac{f}{2}\right) \quad (1.42)$$

Avec

$$H_1(f) = \left(-e^{-i2\pi(2p+1)f}\right)H_0^*\left(f+\frac{1}{2}\right)$$

$$\leftrightarrow h_1[l] = (-1)^l h_0^*[2p+1-l] \quad (1.43)$$

où p est un entier quelconque.

On vérifie, en effet, que la condition (1.43) permet d'assurer que (1.28)et (1.29) sont vérifiées, dès que (1.26) l'est.

Un paramètre important pour une ondelette est son nombre de moments nuls. L'ondelette mère $\psi(t)$ possède N moments nuls si elle est « orthogonale » à tous les polynômes de degrés strictement inférieurs à N, ce qui équivaut à :pour tout $m \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\psi\left(\frac{t}{2^j}-k\right)dt = 0, \quad (1.44)$$

Cela signifie qu'un signal s'identifiant à un polynôme de degré (au plus) $N-1$ sur l'intervalle de temps où il est étudié, a toute son énergie concentrée sur ses coefficients d'approximation, ses coefficients d'ondelettes étants nuls.

En utilisant les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier,on peut réécrire la condition (1.44) sous la forme :

$$\frac{d^m \psi(0)}{df^m} = 0 \text{ , pour tout } m \in \{0, \dots, N-1\} \quad (1.45)$$

Du fait de la relation (1.42), on peut montrer que (1.45) équivaut à :

$$\frac{d^m H_1(0)}{df^m} = 0, \text{ pour tout } m \in \{0, \dots, N-1\} \quad (1.46)$$

Le nombre N se réduit ainsi au nombre de dérivées nulles en 0 de la réponse fréquentielle du filtre passe-haut de l'AMR. On peut ainsi dire que ce filtre possède un zéro d'ordre N à la fréquence nulle.Plus on exige un nombre grand de moments nuls, plus on contraint sa réponse fréquentielle à être « plate » au voisinage de l'origine. Remarquons que, d'après la relation (1.32), on a nécessairement au moins un moment nul (≥ 1) et, par conséquent, la condition (1.11) est toujours vérifiée.

On déduit de la propriété (1.46) que le filtre passe-bas, lié au filtre passe-haut de l'AMR par la relation (1.43), possède un zéro d'ordre N à la fréquence 1/2.

1.2.6 Familles d'ondelettes

L'un des avantages de l'AMR est de fournir un cadre précis pour la conception de bases d'ondelettes. Différentes familles d'ondelettes peuvent être obtenues, selon la façon dont sont construites les approximations multi résolution du signal.

1.2.6.1 Ondelettes de Shannon-Nyquist

Une façon naturelle de générer une suite d'approximations de moins en moins fines du signal analysé $s(t)$ est de réduire graduellement sa bande passante. Pour construire les ondelettes de Shannon Nyquist, on part d'une AMR où l'on vient tronquer les composantes spectrales $S(f)$ du signal au de là des fréquences $\mp 2^{-j-1}$. Les espaces d'approximations correspondants sont donnés par :

$$V_j = \{s(t) \in L^2(R), S(f) = 0 \text{ Pour } |f| \geq 2^{-j-1} \quad (1.47)$$

Le nom des ondelettes résultantes provient du lien avec le célèbre théorème d'échantillonnage (dit de Shannon-Nyquist) [10] qui nous assure que des signaux à bande limitée tels que ceux appartenant à $V_j$peuvent être reconstruits, sans perte d'information, à partir de leurs échantillons, pourvu que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure ou égale à 2^{-j}. Plus précisément, en se plaçant à la fréquence de Nyquist 2^{-j}, on a pour tout signal $s(t) \in V_j$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(2^j k\right) sinc\left(\pi \left(\frac{t}{2^j} - k\right)\right) \quad (1.48)$$

où $sinc(t)$ désigne la fonction sinus cardinal définie par :

$$sinc(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & si\ t \neq 0 \\ 1 & si\ t = 0 \end{cases} \quad (1.49)$$

La transformée de Fourier de $sinc(\pi t)$ est l'impulsion rectangular$rectangulair_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(f)$ valant 1 sur l'intervalle et$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 0 ailleurs. Ce fait associé à la formule (1.48) permet de montrer que l'ensemble des fonctions $\{2^{-\frac{j}{2}} sinc\left(\pi\left(\frac{t}{2^j}-k\right)\right)\ k \in Z\ \}$ forme une base orthonormale de V_j. Ainsi, la fonction d'échelle est tout simplement :

$$\varphi(t) = sinc(\pi t) \quad (1.50)$$

En écrivant sous forme fréquentielle l'équation à 2 échelles (1.19):

$$\emptyset(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{f}{2}\right) \emptyset(\frac{f}{2}) \quad (1.51)$$

on peut déduire le filtre passe-bas de cette AMR. Il s'agit d'un passe bas idéal de fréquence de coupure $1/4$ et de réponse fréquentiel égale $\sqrt{2}$ à dans sa bande passante. On peut choisir le filtre complémentaire (passe-haut idéal de fréquence de coupure 1/4, de réponse fréquentielle égale à $\sqrt{2}$ dans sa bande passante) comme second filtre de l'AMR. Sa réponse fréquentielle $H_1(f)$ vérifie effectivement les conditions (1.28) et (1.29). À l'aide des relations précédentes et de(1.22), on peut déterminer l'expression de l'ondelette mère :

$$\psi(t) = sinc\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cos(\frac{3\pi t}{2}) \quad (1.52)$$

Les éléments caractéristiques de cette AMR sont représentés sur la figure **13**.

En raison du caractère idéal des filtres correspondant à cette AMR, les ondelettes de Shannon-Nyquist sont très bien localisées d'un point de vue fréquentiel. En revanche, comme le montre l'expression ci-dessus, leur pouvoir de localisation temporelle est assez limité.

1.2.6.2 Ondelettes de Haar

On aboutit aux ondelettes de Haar en partant d'un point de vue diamétralement opposé qui met l'accent sur la représentation temporelle du signal. Ce dernier est approximé à l'aide de fonctions en escalier dont les « marches » s'élargissent au fur et à mesure que *j* croît.

L'AMR est définie à partir des sous-espaces :$V_j = \{s(t) \in L^2(R), \forall k \in Z\}$, $s(t)$est constante pour $t \in [2^j k, 2^j(k+1)[$

La famille de fonctions $\{2^{-j/2} r_{[2^j k, 2^j(k+1)[}, k \in Z\}$ constituant une base ortho normale de V_j , la fonction d'échelle de cette AMR est $\varphi(t) = r_{[0,1[}(t)$ Cette dernière vérifie clairement la relation :

$$\varphi(t/2) = \varphi(t) + \varphi(t-1) \quad (1.53)$$

Si on l'identifie à l'équation (1.19), cette relation nous fournit comme réponse impulsionnelle du filtre passe-bas de l'AMR :

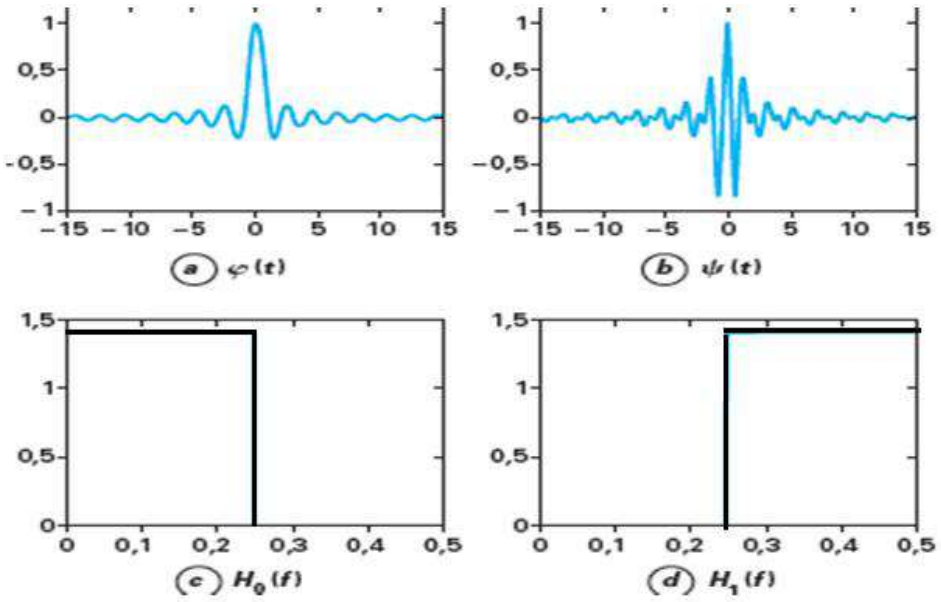


Figure13– AMRdeShannon – Nyquist : allures des fonctions $\varphi(t)$, ψ(t),$H_0(f)$et $H_1(f)$

$$h_0[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & si\ k \in \{0,1\} \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad (1.54)$$

On peut utiliser la relation (1.43) pour effectuer le choix du filtre passe haut associé, ce qui, en prenant $p = 0$, conduit à :

$$h_1[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\ si\ k = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ si\ k = 1 \\ 0\ sinon \end{cases} \qquad (1.55)$$

Ces filtres n'ont que deux coefficients non nuls et sont donc très faciles à implanter. Au contraire, ceux correspondant aux ondelettes de Shannon-Nyquist ont des réponses impulsionnelles faisant intervenir une infinité de termes et il est impossible de les mettre enoeuvre de façon exacte.

La formule (1.42) nous permet de calculer l'ondelette mère, qui s'écrit :

$$\psi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \quad (1.56)$$

Les graphes de la fonction d'échelle et de l'ondelette mère sont donnés par les figures **14a** et **b**. Les réponses fréquentielles des filtres passe-bas et passe-haut de l'AMR sont tracées sur les figures**14c** et **d**. La forme de $\varphi(t)$ met en évidence la dualité existant avec la fonction d'échelle de Shannon-Nyquist, qui a la même allure rectangulaire dans le domaine spectral. À

l'inverse des ondelettes de Shannon-Nyquist, celles de Haar sont bien localisées temporellement mais mal localisées fréquentielle ment.

1.2.6.3 Ondelettes splines

D'un point de vue pratique, il est intéressant de pouvoir synthétiser des ondelettes qui fournissent des solutions intermédiaires entre les cas extrêmes que constituent les deux analyses temps-fréquence précédentes. Pour y parvenir, on peut reprendre l'idée àl'origine de l'AMR de Haar en approximant le signal par morceaux, sur chaque intervalle$[2^j k, 2^j(k+1)[$ ou'$k \in Z$. Cependant, afind'obtenir des approximations multirésolution « lisses », on approxime le signal, sur chacun de ces intervalles, non plus par une constante mais par un polynôme d'un certain degréN. Toujours par souci de régularité, on impose à ces approximations d'être de dérivées continues, jusqu'à l'ordre $N-1$, aux « points de raccord»situés en$2^j k, k \in Z$.

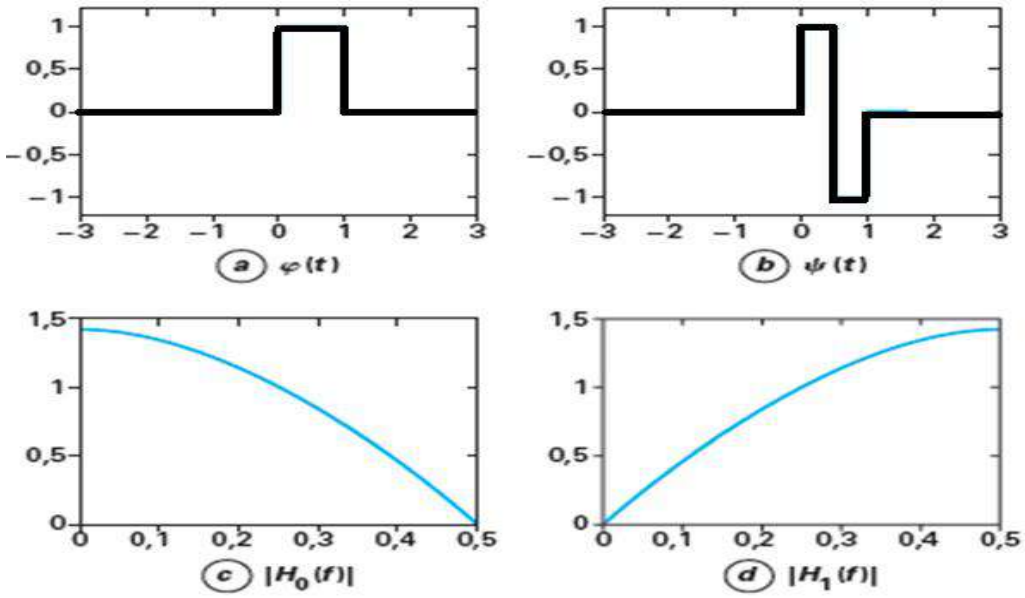


Figure 14 – AMR de Haar : allures des fonctions $\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|$ Et $|H_0(f)|$

Les fonctions polynomiales par morceaux telles que celles que nous venons de décrire sont connues sous le nom de splines. Les splines constituent des outils traditionnels d'approximation en analyse fonctionnelle [11] et il est intéressant d'observer qu'ils ne sont pas sans lien avec le concept d'AMR. Nous bornerons ici à donner quelques indications sur leur utilisation dans ce contexte.

Les filtres passe-bas et passe-haut associés aux AMR splines sont à réponse impulsionnelle infinie et à phase linéaire. Le tableau **1** résume leurs propriétés de symétrie ainsi que celles dont héritent la fonction d'échelle et l'ondelette mère. Les ondelettes obtenues, aussi appelés ondelettes de Battle-Lemarié [12], sont à décroissance exponentielle et possèdent $N+1$ moments nuls. Parmi les membres les plus connus de cette famille, se trouvent les ondelettes de Franklin ($N=1$) et les ondelettes splines cubiques ($N=3$)qui sont représentées sur les figures **15** et **16**.

Notons au passage qu'il existe des ondelettes plus régulières que celles que nous venons de décrire, telles que les ondelettes de Meyer qui sont indéfiniment dérivables et à décroissance rapide [7].

Tableau 1 – Propriétés de symétrie liées à une décomposition en ondelettes splines orthogonales

	$h_0[\ell]$	$h_1[\ell]$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
N impair	paire	antisymétrique par rapport à 1/2	paire	symétrique par rapport à 1/2
N pair	symétrique par rapport à 1/2	symétrique par rapport à 1	symétrique par rapport à 1/2	antisymétrique par rapport à 1/2

1.2.6.4 Ondelettes de Daubechies

Nous avons vu que les filtres de l'AMR en ondelettes splines sont théoriquement de longueur infinie. Pour obtenir des AMR plus simples de mise en oeuvre, la mathématicienne Ingrid Daubechies a construit des ondelettes à support borné (ou compact). On peut en effet montrer que la fonction d'échelle et l'ondelette mère d'une AMR sont à support borné si et seulement si les filtres associés sont de longueur finie.

Les ondelettes de Daubechies sont de support minimal (c'est-à-dire que les filtres de l'AMR sont les plus courts) pour un nombre donné N de moments nuls.Leur construction (décrite en détail dans [13]) conduit à des filtres à déphasage minimal, de longueur paire $2N$ pour des ondelettes ayant un support de largeur $2N-1$ Les figures **17** et**18** fournissent les représentations des fonctions d'échelle et des ondelettes de Daubechies pour $N=2$ et $N=3$. On remarque la forte asymétrie de ces ondelettes

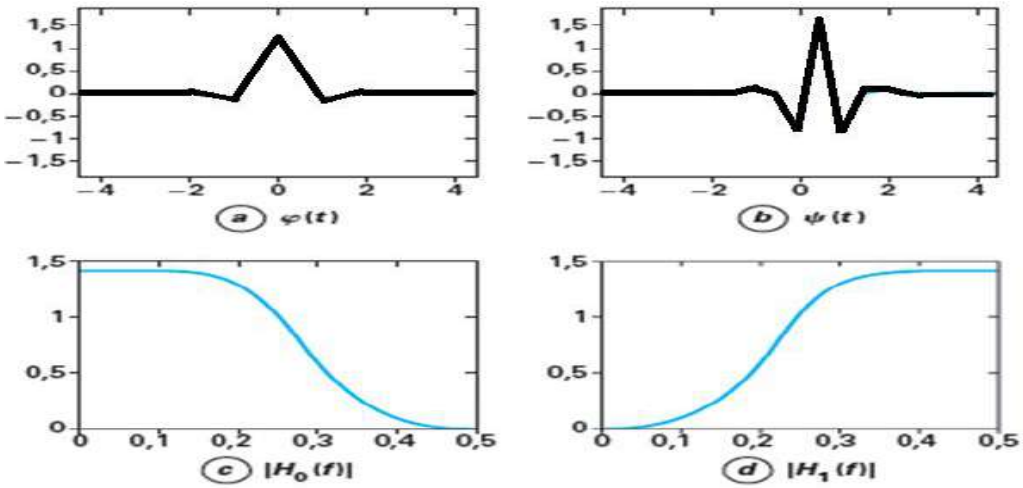


Figure 15 – AMR de Franklin : allures des fonctions $\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|$ Et $|H_0(f)|$

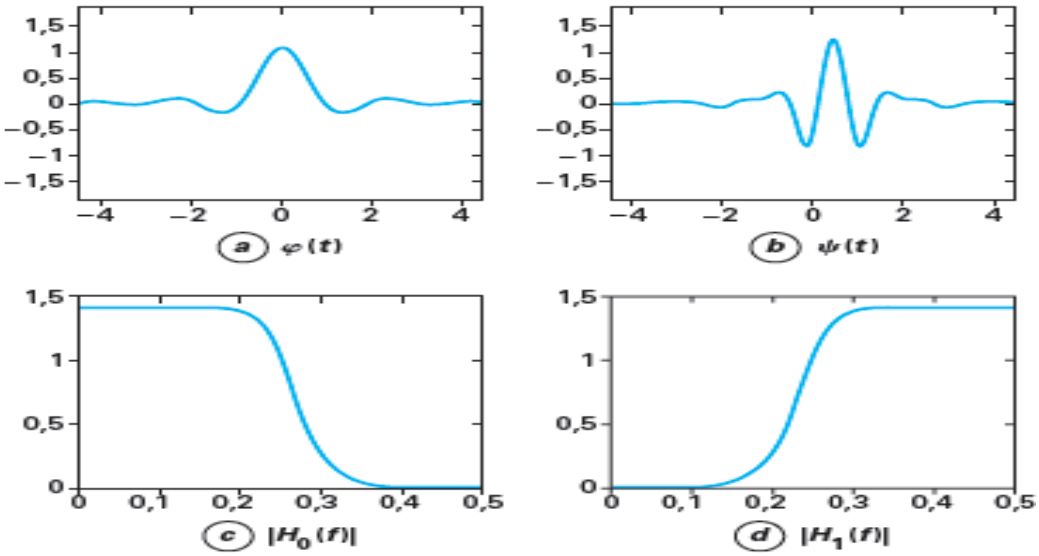


Figure 16 – AMR spline cubique : allures des fonctions$\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|et|H_0(f)|$

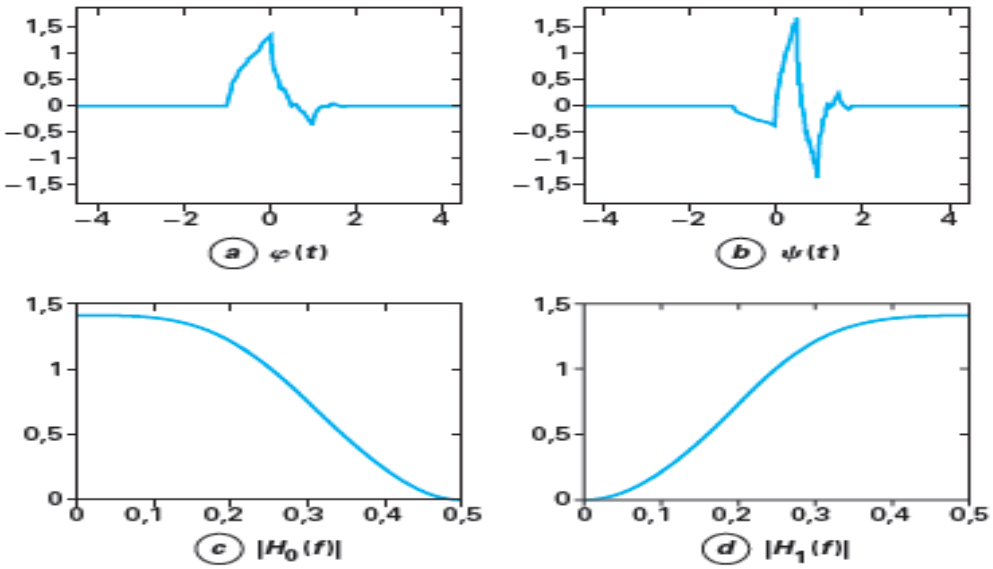


Figure 17 – AMR de Daubechies pour N = 2 : allures des fonctions$\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|$ Et $|H_0(f)|$

.

On peut définir d'autres familles d'ondelettes à support compact, possédant des propriétés quelque peu différentes, telles que les symlets, d'allure plus symétrique, ou les coiflets, pour lesquelles la fonction d'échelle possède un certain nombre de moments nuls.

Il est également possible de concevoir des ondelettes à support compact, dites ondelettes sur l'intervalle, adaptées à l'analyse des signaux de durée finie [14]. Pour ce faire, on modifie de façon judicieuse les fonctions de bases localisées sur les extrémités de l'intervalle de temps considéré. On parvient ainsi à éviter les « effets de bords » qui apparaissent dans les décompositions en ondelettes classiques et qui sont souvent ennuyeux d'un point de vue pratique.

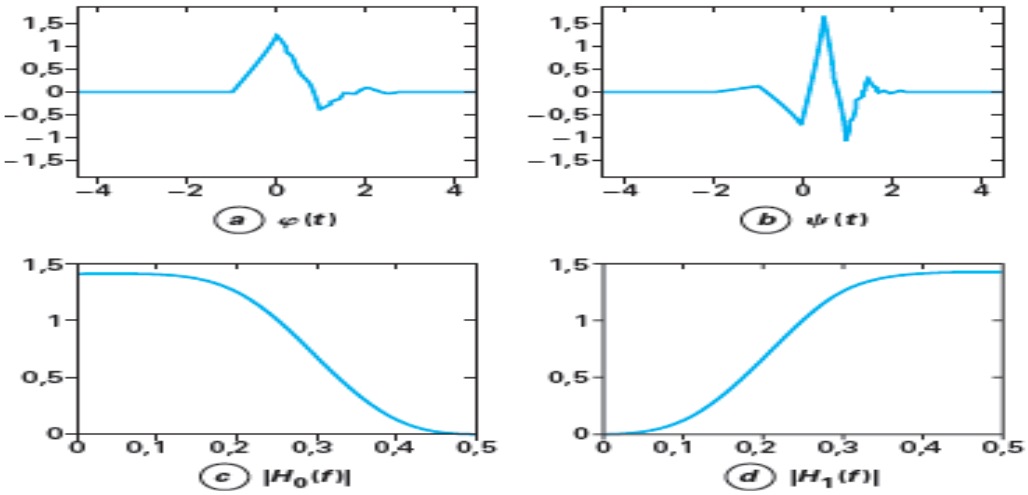


Figure 18 AMR de Daubechies pour N = 3 : allures des fonctions$\varphi(t), \psi(t), |H_1(f)|et|H_0(f)|$

1.2.7 Ondelettes bi orthogonales, « lifting »

L'asymétrie des ondelettes de Daubechies est due au fait que les filtres employés ne sont pas à phase linéaire. On peut démontrer que les seuls filtres para-unitaires qui soient à phase linéaire et de réponse impulsionnelle finie sont ceux de Haar. Or, pour certaines applications (en traitement d'images notamment) il semble pertinent d'utiliser des ondelettes possédant des propriétés de symétrie.

Pour résoudre ce problème, on est amené à relaxer la condition d'orthogonalité de la base d'ondelettes. On aboutit ainsi à la notion d'ondelettes bi orthogonales[14]. Les ondelettes employées pour l'analyse sont alors différentes de celles servant à la synthèse. Plus précisément, on considère deux bases d'ondelettes (non ortho normales) de

$L^2(R), \{2^{-\frac{j}{2}}\psi_1\left(\frac{t}{2^j}-k\right), (j,k) \in Z^2\}$ et $, \{2^{-\frac{j}{2}}\psi_2\left(\frac{t}{2^j}-k\right), (j,k) \in Z^2\}$ vérifiant la propriété de bi orthogonalité :

$$< 2^{-\frac{j}{2}}\psi_1\left(\frac{t}{2^j}-k\right), 2^{-\frac{j'}{2}}\psi_2^*\left(\frac{t}{2^{j'}}-k'\right) > = \begin{cases} 1 \; si \; j = j' et \; k = k' \\ 0 \; sinon \end{cases} \quad (1.57)$$

Un signal $s(t)$ de $L^2(R)$se décompose de manière duale sur les éléments de l'une ou l'autre base :

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}\sum_{k=-\infty} < s(\tau), 2^{-\frac{j}{2}}\psi_1\left(\frac{\tau}{2^j}-k\right) > 2^{-\frac{j}{2}}\psi_2\left(\frac{t}{2^j}-k\right) \quad (1.58)$$

$$= \sum_{j=-\infty}\sum_{k=-\infty} < s(\tau), 2^{-\frac{j}{2}}\psi_2\left(\frac{\tau}{2^j}-k\right) > 2^{-\frac{j}{2}}\psi_1\left(\frac{t}{2^j}-k\right) \quad (1.59)$$

Pour calculer les coefficients d'une de ces décompositions, on peut, comme dans le cas orthogonal, utiliser l'algorithme de Mallat. Les bancs de filtres d'analyse et de synthèse correspondants sont toujours donnés par les figures **9** et **11** où$(h_0[l])_{l\in Z}$ et$(h_1[l])_{l\in Z}$ (respectivement $(\bar{h}_0[l])_{l\in Z}$et $(\bar{h}_1[l])_{l\in Z}$) sont les réponses impulsionnelles des filtres passe-bas et passe-haut de synthèse (respectivement d'analyse). La différence avec le cas ortho normal est qu'on n'impose plus les relations :$\bar{h}_0[l] = h_0^*[-l]$ et $\bar{h}_1[l] = h_1^*[-l]$

Lorsque l'on combine ces deux bancs de filtres en les cascadant, on doit retrouver le signal en entrée. Cette condition de reconstruction parfaite conduit aux contraintes suivantes sur les réponses fréquentielles,$H_0(f)$,$H_1(f)$, $\bar{H}_0(f)$ et $\bar{H}_1(f)$des quatre filtres intervenant :

$$H_0(f)\bar{H}_0(f) + H_1(f)\bar{H}_1(f) = 2 \quad (1.60)$$

$$H_0(f+1/2)\bar{H}_0(f) + H_1(f+1/2)\bar{H}_1(f) = 0 \quad (1.61)$$

Les ondelettes bi orthogonales 9/7, qui sont très couramment utilisées, sont représentées sur les figures **19** et **20**. Les coefficients des filtres correspondants sont fournis dans le tableau **2**.

Tableau 2 – Réponses implusionnelles des filtres passe-bas d'analyse et de synthèse bi orthogonaux 9/7

n	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$h_0[\ell]$	0,852699	0,377403	–0,110624	–0,023849	0,037828
$h_0[\ell]$	0,788486	0,418092	–0,040689	–0,064539	

On a pour les filtres passe-haut : $\bar{h}_1[l] = (-1)^{l+1} h_0[l+1]$ et : $h_1[l] = (-1)^{l-1}\, \bar{h}_0[l-1]$

On a de plus en plus tendance à préférer aux structures des figures**9** et **11**, celles dites en « lifting » [14], des figures **21** et **22**.

En effet, la compréhension du fonctionnement de ces structures est plus intuitif. Lors de l'analyse, le « lifting » fait apparaître un premier traitement correspondant à une prédiction des échantillons d'indices impairs $a_{j-1}[2k+1]$ à partir de ceux d'indices pairs $a_{j-1}[2k]$

Les coefficients d'ondelettes $c_j[k]$ peuvent alors être interprétés comme les erreurs de prédiction résultantes. Puis, est réalisée une mise à jour des coefficients $a_{j-1}[2k]$ à partir des coefficients $c_j[k]$

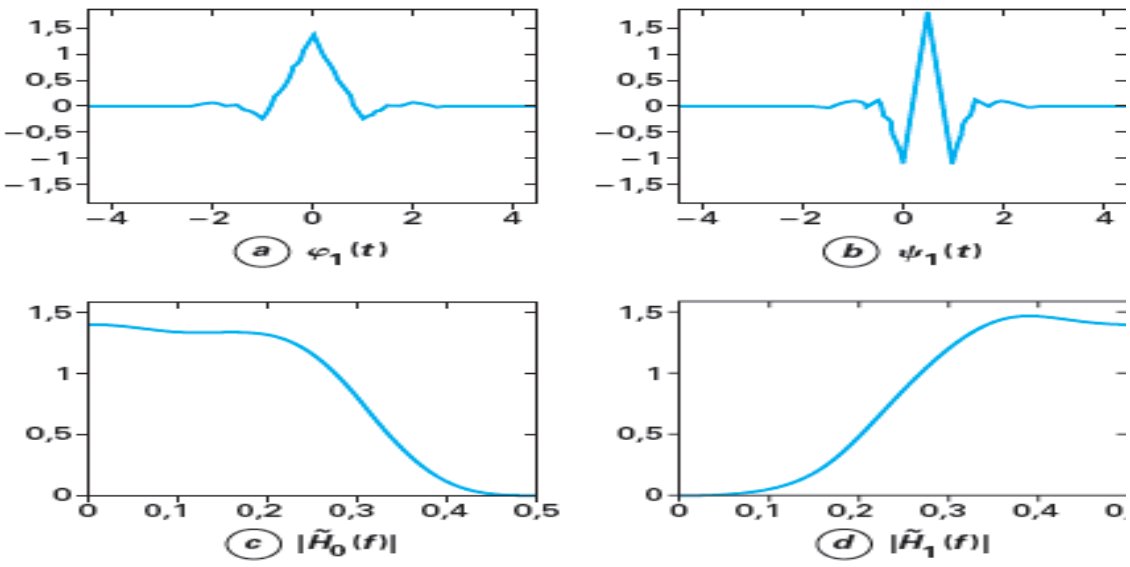


Figure 19 AMR biorthogonale 9/7 : allures de l'ondelette d'analyse$\psi_1(t)$, de la fonction d'échelle associée $\varphi_1(t)$et de $|\bar{H}_0(f)|$et $|\bar{H}_1(f)|$

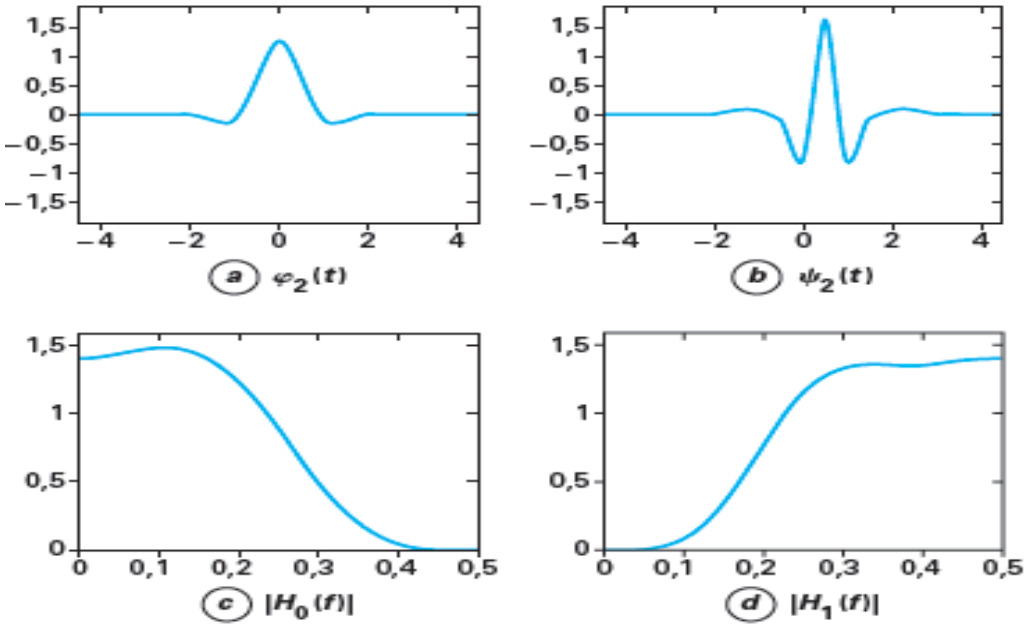


Figure 20 AMR bi orthogonale 9/7 : allures de l'ondelette de synthèse $\psi_2(t)$, de la fonction d'échelle associée $\varphi_2(t)$et de $|H_0(f)|$et $|H_1(f)|$

Ce second traitement a généralement pour objectif d'obtenir des coefficients d'approximation $a_j[k]$variant plus lentement que le signal $a_{j-1}[2k]$. Comme le montre la figure **22**, les filtres de prédiction etde mise à jour (de réponses impulsionnelles respectives$(p[l])_{l\in Z}$ et$(u[l])_{l\in Z}$ne sont soumis à aucune condition pour que la reconstruction parfaite puisse être effectuée à partir de la structure de synthèse duale. Cette absence de contrainte facilite clairement la conception de ces filtres. Par ailleurs, on peut montrer que toute décomposition bi orthogonale associée à des filtres de longueur finie peut être mise en oeuvre à l'aide d'un nombre fini de niveaux de « lifting », suivis de multiplications par des constantes non nulles a_0 et a_1. Une structure d'analyse comportant 2 niveaux de « lifting »est représentée sur la figure **23**.

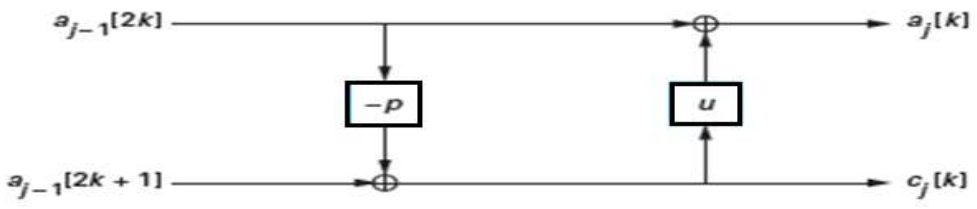


Figure 21 Structure d'analyse en « lifting »



Figure 22 Structure de synthèse en « lifting »

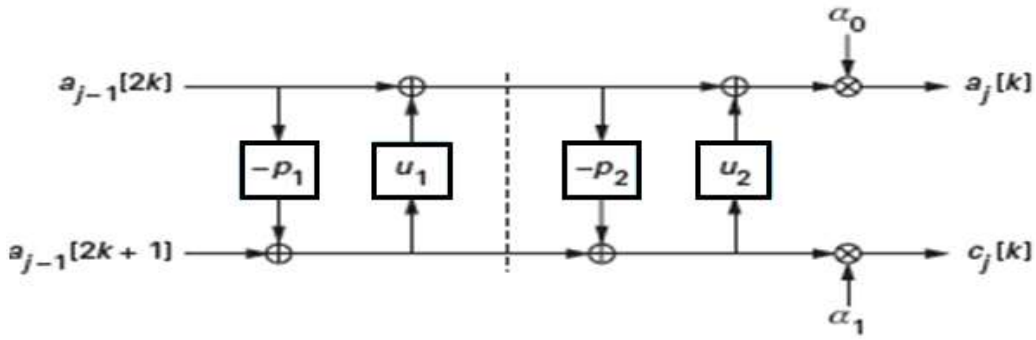


Figure 23 Structure d'analyse avec 2 niveaux de « lifting »

Chapitre 2
Paquets, trames et les bases multi résolution d'ondelettes

2.1 Paquets d'ondelettes :

Quand les signaux étudiés deviennent plus complexes, il peut être intéressant de chercher à adapter leur représentation à leurs caractéristiques temps-fréquence. Ce fait s'est imposé relativement rapidement aux chercheurs travaillant sur les ondelettes, et notamment sur leurs applications en audio. Signalons dès à présent que cette adaptivité se paie par une augmentation sensible de la complexité des algorithmes employés.

2.1.1 Bancs de filtres de structures quelconques

Comme le montre la figure **10**, les décompositions en ondelettes orthogonales (ou bi orthogonales) reposent sur l'emploi itératif de bancs de filtres agissant toujours sur les coefficients d'approximation.

Au fur et à mesure que le niveau de résolution j augmente, l'analyse du signal se focalise sur des bandes de fréquences de plus en plus basses. Des décompositions plus générales peuvent être obtenues en autorisant également la redécomposition des sous bandes« hautes-fréquences». De cette manière, on obtient la structure généralisée, dite en sous-bandes égales, de la figure **24**.

On remarque que cette décomposition est réalisée à l'aide des mêmes filtres para-unitaires (de réponses impulsionnelles h_0 et h_1)que ceux qui, au paragraphe 2.2, nous ont servi à construire la décomposition en ondelettes ortho normales. De plus, on peut montrer que, si $(c_{0,0}[k])_{k\in Z}$désigne la suite des coefficients d'approximation au niveau de résolution 0 d'un

signal $s(t)\epsilon V_0$, alors les coefficients issus de chaque branche de la décomposition sont donnés par :

$$c_{j,m}[k] =< s(t), \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\omega_m\left(\frac{t}{2^j}-k\right) > , \quad k\epsilon Z \qquad (2.62)$$

où les fonctions ω sont calculées récursivement à l'aide des équations à 2 échelles suivantes [15] :

$$\omega_{2m}(t) = \sum_{l=-\infty} h_0[l]\sqrt{2}\omega_m(2t-l) \qquad (2.63)$$

$$\omega_{2m+1}(t) = \sum_{l=-\infty} h_1[l]\sqrt{2}\omega_m(2t-l) \qquad (2.64)$$

En posant $m = 0$ et en comparant les relations obtenues avec les relations (1.19) et (1.42), on remarque que les fonctions $\omega_0(t)$ et $\omega_1(t)$ nesont autres que la fonction d'échelle $\varphi(t)$ et l'ondelette mère $\psi(t)$.

Les fonctions $(\omega_m(t))_{m\epsilon N}$ainsi mises en évidence sont appelées paquets d'ondelettes. On peut associer à ces fonctions des sous espaces vectoriels$\Omega_{j,m}$, m dont les familles

$\beta_{j,m}$= $\{\frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\omega_m\left(\frac{t}{2^j}-k\right), k \in Z\}$ sont des bases orthonormales. En particulier, on a

$\Omega_{j,0} = V_j$ et$\Omega_{j,1} = W_j$. La condition de para-unitarité des filtres de l'AMR nous assure que, par construction, les sous-espaces vectoriels $\Omega_{j,2m}$ et $\Omega_{j,2m+1}$sont orthogonaux et tels que $\Omega_{j-1,m} = \Omega_{j,2m} \oplus \Omega_{j,2m+1}$,ce qui généralise la relation (8).

Cette décomposition en sous espaces vectoriels complémentaires permet d'associer la structurede la figure **24** au schéma de décomposition en arbre binaire de la figure **25**.

Notons que, plutôt que de décomposer toutes les sous-bandes,on peut très bien ne le faire que pour certaines d'entre elles. La figure **26** fournit un exemple d'un banc de filtres obtenu de cette manière. On a ainsi la possibilité de définir des bancs de filtres de« géométrie » quelconque.

2.1.2 Arbres de décomposition :

La manière récursive dont l'arbre de décomposition a été construit nous permet d'établir le lien entre les indices j et m : à chaque niveau de résolution $j\epsilon N$ (correspondant à la « profondeur » où l'on se trouve dans l'arbre), l'indice $m \in \{0, \ldots\ldots, 2^j - 1\}$ d'un noeud de l'arbre est égal au nombre de noeuds situés à sa gauche sur le même niveau. Chacun de ces noeuds étant matérialisé par une sous-bande$m$ peut-être considéré comme un indice fréquentiel.

Il serait pourtant inexact de dire que, plus m est grand, plus la sous-bande est de fréquences hautes (problème de l'ordre de Paley[15]).

Un nœud sans descendant constitue une feuille de l'arbre. À chaque arbre binaire correspond une base de paquets d'ondelettes, obtenue en agrégeant les bases ortho normales $\beta_{j,m}$de chaque souse espace vectoriel $\Omega_{j,m}$ correspondant à une feuille de l'arbre. Il y a donc autant de bases de paquets d'ondelettes que d'arbres possibles

Revenons sur l'exemple de la figure **26**. Ce banc de filtres correspond à l'arbre binaire de la figure **27**. On voit donc que l'espace vectoriel d'origine V_0 a été partitionné en sous-espaces complémentaires de la façon suivante :

$$V_0 = \Omega_{2,0} \oplus \Omega_{3,2} \oplus \Omega_{3,3} \oplus \Omega_{2,2} \oplus \Omega_{2,3} \qquad (2.65)$$

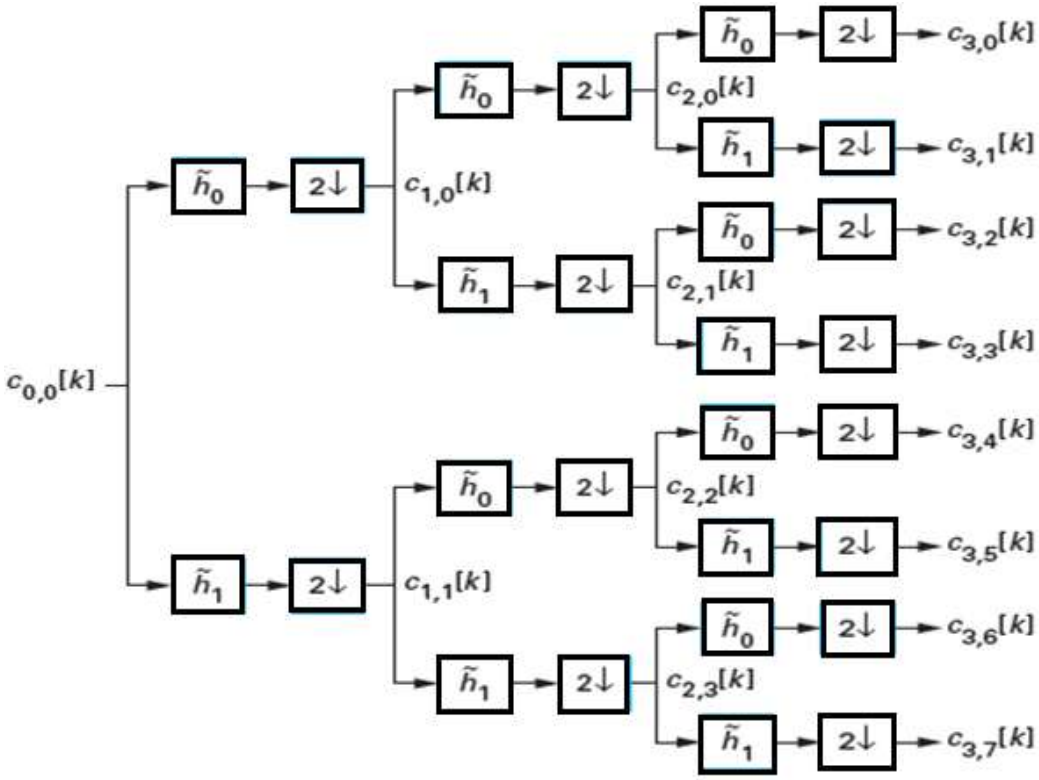


Figure 24 Analyse en sous-bandes égales sur 3 niveaux de résolution

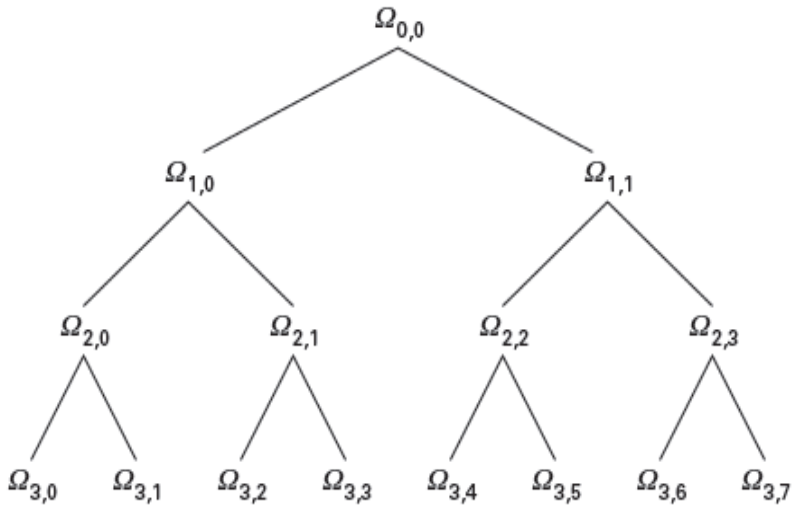


Figure 25 Arbre associé à l'analyse en sous-bandes égales

.

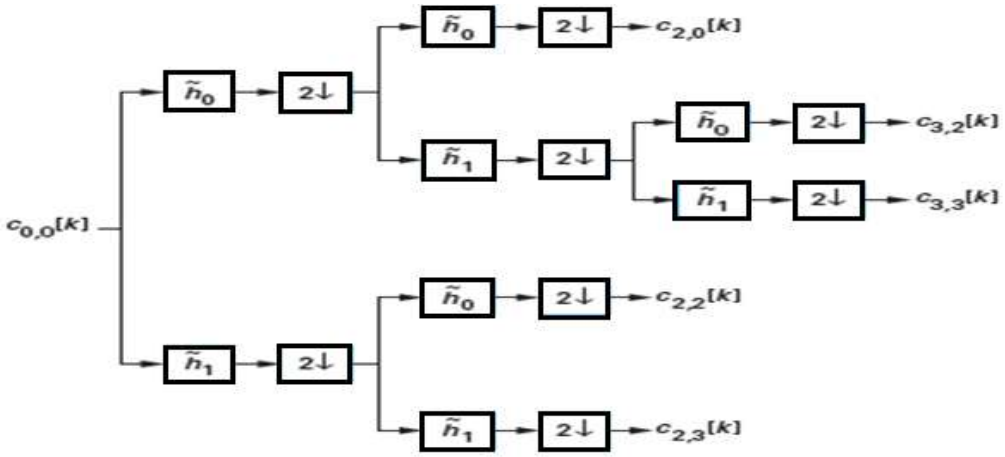


Figure 26 Exemple de décomposition en paquets d'ondelettes

.

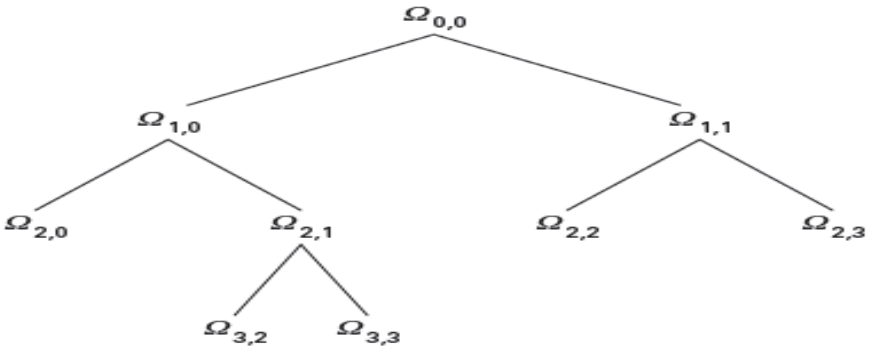


Figure 27 Arbre associé à la décomposition en paquetsd'ondelettes de la figure 26

2.1.3 Localisation temps-fréquence

Chaque nœud de l'arbre d'indice (j,m) est associé à une sousbanddont le support fréquentiel est de largeur approximativement égale à 2^{-j}. La modification de la structure du banc de filtres d'analyse peut donc être vue comme le choix d'une segmentation fréquentielle du signal. On conserve néanmoins un pouvoir de localisation temporelle en raison du support compact (ou du caractère rapidement décroissant) des paquets d'ondelettes usuels. Ces décompositions en paquets d'ondelettes conduisent ainsi à des pavages du plan temps fréquence du type de celui de la figure **28**. Remarquons que, conformément au principe d'incertitude de Gabor-Heinsenberg, mieux un pavé est localisé en fréquence (c'est-à-dire plus il est étroit suivant l'axe des fréquences), plus il est étalé suivant l'axe temporel.

2.1.4 Ondelettes de Malvar

À l'inverse, on peut découper un intervalle de temps $[0,T[$ en segments dyadiques

$I_{j,m} = [2^{-j}mT, 2^{-j}(m+1)T[$ ou'$j \in N \quad m \in \{0, \ldots\ldots, 2^{j}\text{-}1\}$

Une segmentation temporelle dyadique est représentée sur la figure **29** et peut aussi être associée à l'arbre de la figure **30**. Par ailleurs, sur chacun des segments, on peut mener une analyse fréquentielle en calculant, par exemple, les coefficients de Fourier de la portion de signal ainsi délimitée.

L'idée que nous venons d'ébaucher peut être perfectionnée en laissant les segments se chevaucher et en les pondérant par des fenêtres assurant des transitions « douces ». De plus, une transformation réelle en cosinus est utilisée plutôt qu'un développement en série de Fourier. On aboutit ainsi à une décomposition ortho normale en ondelettes de Malvar[16]. En terme de localisation temps-fréquence, cette dernière conduit à des pavages du plan temps-fréquence tels que celui de la figure **31**.

Signalons l'existence d'analyses (qu'on peut qualifier de bi-arborescentes)qui généralisent les décompositions en paquets d'ondelettes en réalisant conjointement des segmentations temporelle et fréquentielle[41]

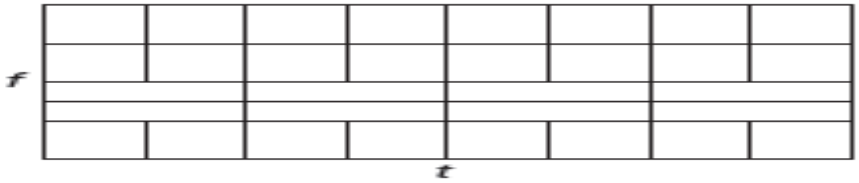


Figure 28 Pavage du plan t-f à l'aide de paquets d'ondelettes. Cet exemple correspond à la décomposition de la figure 26

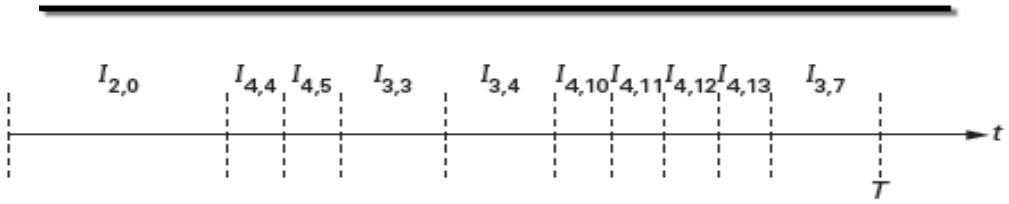


Figure 29 Exemple de segmentation temporelle dyadique

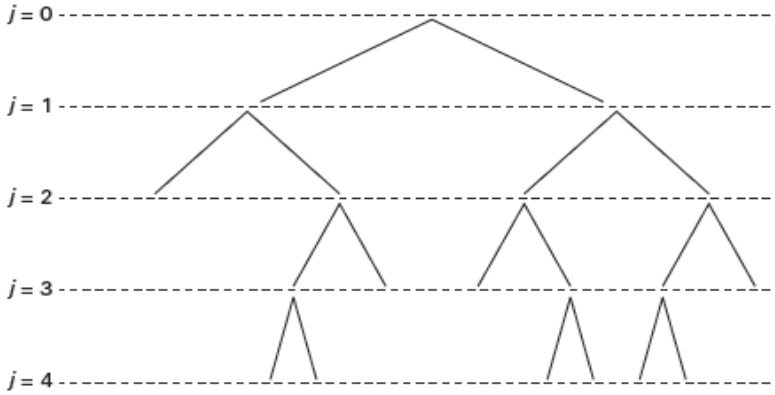


Figure 30 Arbre associé à la segmentation de la figure 29

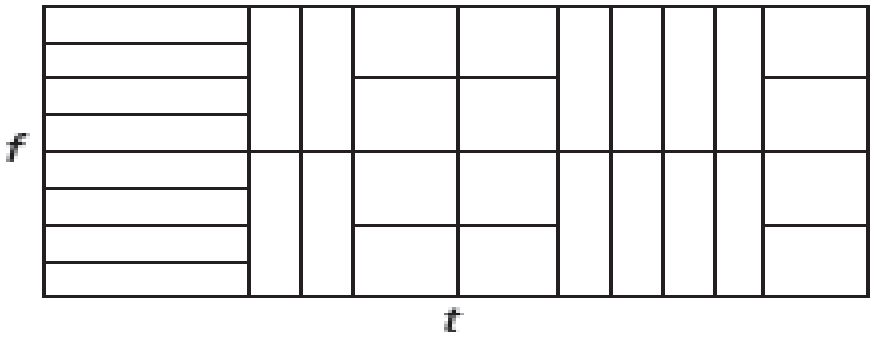


Figure 31 Pavage du plan t-f à l'aide d'ondelettes de Malvar.Cet exemple correspond à la segmentation de la figure 29

2.1.5 Choix de la meilleure base

Les bases ortho normales présentées jusqu'ici ne dépendent pas du signal traité. Afin d'optimiser la représentation d'un signal donné, on peut choisir la base la mieux adaptée à ce signal parmi un dictionnaire formé de plusieurs bases. Les paquets d'ondelettes et les bases trigonométriques locales (ondelettes de Malvar) sont des exemples de telles bases ortho normales pouvant entrer dans la constitution de dictionnaires. Elles décomposent le signal sur des atomes temps-fréquence et, en sélectionnant la meilleure base, on détermine la décomposition la mieux adaptée à la structure temps fréquence du signal analysé.

2.1.5.1 Critères de choix

Pour fixer les idées, supposons que E soit un sous-espace vectoriel de $L^2(R)$ de dimension K et que $\beta = \{e_K(t), K \in \{1, \dots, K\}\}et\beta' = \{e_K(t), K \in \{1, \dots, K\}\}$soient deux bases orthonormales de E.

Considérons maintenant un signal $s(t)$ de $L^2(R)$. Son approximation sur le sous-espace vectoriel E s'écrit dans les deux bases ortho normales :

$$proj_E s(t) = \sum_{l=1}^{\wedge} s[k]e_l(t). |s(1)| \geq \cdots \dots \geq |s[K]| \quad (2.66)$$

$$= \sum_{l=1}^{\wedge} s'[k]e'_l(t). |s'(1)| \geq \cdots \dots \geq |s'[K]| (2.67)$$

où $s(l) =< s(t), e_l(t) >$ et $s'(l) =< s(t), e'_l(t) >$, les éléments des deux bases ayant été réindexés dans l'ordre décroissant de leur importance vis-à-vis de la représentation du signal $s(t)$. Quand on utilise un nombre $K \in \{1, \dots, K\}$de fonctions de base, l'erreur quadratique d'approximation est donnée, dans chacun des deux cas, par :

$$\varepsilon[K] = \|s\|^2 - \sum_{l=1}^{\wedge} |s[l]|^2. \quad (2.68)$$

$$\varepsilon'[K] = \|s\|^2 - \sum_{l=1}^{\wedge} |s'[l]|^2 \quad (2.69)$$

Il est clair que la base βse révèle meilleure que la base β' si,

$$\text{pour tout } K \in \{1, \dots, K\}, \varepsilon[K] \leq \varepsilon'[K] \quad (2.70)$$

ou, de manière équivalente, si :

$$\forall K \in \{1, \dots, K\}, \sum_{l=1}^{\wedge} |s[l]|^2 \geq \sum_{l=1}^{\wedge} |s'[l]|^2. \quad (2.71)$$

La relation précédente exprime une propriété de concentration de l'énergie du signal sur un nombre K de composantes, ce qui est avantageux pour obtenir une représentation parcimonieuse de ce signal. Par ailleurs, on peut montrer que si la relation (2.71) est vérifiée, alors pour toute fonction réelle concave J définie sur , on a:

$$Q(s, \beta) = \sum_{l=1}^{\wedge} J(|s[k]|^2) \leq . \sum_{l=1}^{\wedge} J(|s'[k]|^2) = Q(s, \beta'). \quad (2.72)$$

Par extension de ce résultat, on peut considérer que βest meilleure base que β' pour le signal $s(t)$, au sens de la fonction concave J, si l'inégalité ci-dessus est vérifiée.

Dans ce contexte, Q est appelée fonction de coût. La fonction de coût la plus courante est l'entropie définie par $J(u) = -u \ \ln(u)$. Dans ce cas, le coût est :

$$Q(s, \beta) = -\sum_{l=1}^{\wedge} |s[k]|^2 \ln(|s[k]|^2) \quad (2.73)$$

2.1.5.2 Algorithme de sélection

Le problème pratique qui se pose maintenant est celui de la recherche rapide de la meilleure base au sein d'un dictionnaire, pour un signal donné. Sachant que pour un signal comportant K échantillons, le dictionnaire peut comprendre plus de $2^{K/2}$ bases, la comparaison directe

des différentes bases conduirait à plus de $K2^{K/2}$opérations, ce qui représente une charge de calcul prohibitive.

L'algorithme de Wickerhauser [17] que nous allons décrire permet de se ramener à une complexité de l'ordre de $K \log_2 K$ opérations.

Considérons un dictionnaire de base ortho normale

, $$\beta_{j,m},\ 0 \le m \le 2^j - 1\ ,\ \ 0 \le j \le j_{max} \qquad (2.74)$$

structurées suivant un arbre binaire. Le nombre j_{max} correspond iciau nombre maximal de niveaux de résolution permis. Conformément au paragraphe précédent, on se donne une certaine fonction de coût « additive » Q. Nous allons, par ailleurs, noter $\beta^*_{j,m}$ la meilleure base « trouvée » par l'algorithme au noeud .(j,m)

L'algorithme de Wickerhauser choisit progressivement la meilleure base, en commençant par les feuilles de l'arbre se trouvant au niveauj_{max}, et en remontant jusqu'au noeud (0, 0). Pour chaque feuille (indexée par.(j_{max}, m)), on se contente de la seule base disponible,$\beta_{j_{max},m}$

. La première étape de l'algorithme consiste donc à fixer :

$$\forall\, m\ \in \{0, \dots, 2^{j_{max}-1}\},\ \ \beta^*_{j_{max},m} = \beta_{j_{max},m} \qquad (2.75)$$

Ensuite, aux niveaux supérieurs de la décomposition (pour j variant Dans$\{0, \dots \dots, j_{max} - 1\}$, On exploite le critère de concentration d'énergie pour décider quelle est la meilleure base d'un sous-espace $\Omega_{j,m}$

Pour cela, on compare le coût de la décomposition sur la base $\beta_{j,m}$à celui correspondant aux meilleures bases qui, lors des itérations précédentes de l'algorithme, ont été choisies, pour les nœuds.$(j+1,2m)$ Et $(j+1,2m+1)$ en d'autres termes, si :

$$Q(s, \beta_{j,m}) \le Q(s, \beta^*_{j+1,2m} \cup \beta_{j+1,2m+1}) \qquad (2.76)$$

alors la meilleure base au nœud (j,m)est .$\beta^*_{j,m} = \beta_{j,m}$ Si non, le nœud reste décomposé et on effectue la concaténation des meilleures bases de ses « descendants » :

$$\beta^*_{j,m} = \beta^*_{j,2m} \cup \beta_{j,2m+1} \qquad (2.77)$$

En itérant le procédé, on arrive à la racine de l'arbre (noeud $(0,0)$) et,au final, la meilleure base est .$\beta^*_{0,0}$

2.2 Trames d'ondelettes :

La transformée continue en ondelettes (1.8), de même que la transformée de Fourier à court terme (1.5), sont des représentations qui ne sont pas « économiques », en ce sens que, partant d'un signal monodimensionnel, on arrive à une fonction de deux variables réelles.

On dit que ces représentations sont très redondantes. De plus, l'implantation sur ordinateur des algorithmes d'analyse et de synthèse à l'aide de ces transformations nécessite, à un moment donné, l'échantillonnage du signal. Cela constitue un argument pour travailler dès le début avec des décompositions discrètes. À l'autre extrême, se situent les décompositions sur des bases d'ondelettes qui sont non redondantes, mais qui présentent des inconvénients dans un certain nombre d'applications. Par exemple, en reconnaissance de formes, il est important que la représentation d'un objet ne varie pas en fonction de sa position. En translatant le signal, on souhaiterait donc que les coefficients d'ondelettes ne subissent qu'un effet de translation. Cette propriété d'invariance par translation n'est malheureusement pas vérifiée pour les décompositions sur des bases d'ondelettes.

Un compromis entre ces deux analyses est obtenu à l'aide de décompositions discrètes redondantes sur des trames d'ondelettes(frames en anglais). Ces trames sont des familles de fonctions

$$\{\psi_{j,k}(t), (j,k)\epsilon\, I\} \qquad (2.78)$$

où I est un sous-ensemble de Z^2. Le signal s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la trame, mais on n'impose plus la condition que ces fonctions forment une base. La seule condition requise est l'existence de deux constantes réelles strictement positives,A et B, appelées bornes de la trame, telles que, pour toute fonction$s(t)$, on ait :

$$A\|s\|^2 \leq \sum_{(j,k)\in I} \left| < s(t), \psi_{j,k}(t) > \right|^2 \qquad (2.79)$$

Cette condition assure la possibilité de reconstruire le signal à partir de ses coefficients de décomposition :.$c_{j,k} = < s(t), \psi_{j,k}(t) >$

Sous certaines conditions sur la fonction $\psi(t)$ et sur les réels $\gamma > 1$et $b_0 > 0$ [27], [28], on peut montrer que les fonctions :

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\gamma^{\frac{j}{2}}} \psi\left(\frac{t - k b_0 \gamma'}{\gamma'}\right),\ (j,k) \in\ Z^2 \qquad (2.80)$$

forment une trame de $.L^2(R)$ L'expression précédente correspond à une discrétisation des paramètres d'échelle et de localisation intervenant dans la relation (1.8). L'un des avantages de ces trames est de permettre un échantillonnage temporel plus fin (de pas $b_0\gamma^j$) que l'échantillonnage dyadique (de pas 2^j) typique des décompositions sur des bases d'ondelettes.

Un autre aspect intéressant est la possibilité de choisir de manière plus souple la forme de l'ondelette mère$\psi(t)$ lorsque sont relâchées les contraintes d'orthogonalité ou de bi orthogonalité.

Pour s'affranchir des problèmes de non-invariance par translation posés par les bases d'ondelettes, on est amené à considérer des familles de fonctions :

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}}\psi\left(\frac{t-k}{2^j}\right),\ 0 < j \leq j_{max}\ , k \in Z \qquad (2.81)$$

Sous certaines hypothèses, on parvient, à partir de ces fonctions, à générer des trames de l'espace V_0 d'une AMR [18]. L'algorithme à trous [19] offre une solution efficace pour mettre en œuvre les décompositions associées. Cet algorithme, que nous ne détaillerons pas, présente un fort lien de parenté avec l'algorithme de Mallat.

2.3 Bases d'ondelettes multidimensionnelles

Les AMR multidimensionnelles, et notamment bidimensionnelles, sont importantes dans des domaines comme le traitement d'images, la vision par ordinateur, ou l'étude de la turbulence.

Dans ces applications, les données brutes sont parfois de volume trop important pour être traitées en temps réel par des algorithmes sophistiqués. Dans la mesure du possible, il faut donc chercher à extraire les informations ou détails essentiels présents dans ces données. Les ondelettes multidimensionnelles peuvent servir à l'extraction de ces caractéristiques. Dans la suite, nous illustrerons notre propos dans le cas 2D.

2.3.1 Analyses multi résolution séparables

L'extension multidimensionnelle la plus simple et la plus couramment utilisée de L'AMR 1D est obtenue en considérant des produits tensoriels d'espaces vectoriels[20]. Sans entrer dans les détails, disons qu'il s'agit de partir d'outils monodimensionnels et de les faire agir successivement suivant chaque dimension de l'espace.

On montre ainsi que, si $(V_j)_{j\in Z}$est une AMR de $L^2(R)$, on peut en déduire une AMR séparable de $L^2(R^2)$ que nous noterons .$({V_j}^2)_{j\in Z}$Si $\varphi(t)$est la fonction d'échelle associée à l'AMR $(V_j)_{j\in Z}$, alors unebase orthonormale de ${V_j}^2$est donnée par :

$$\{\frac{1}{2^j}\varphi\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}\right)\varphi\left(\frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right)\ , (n,m)\ \epsilon Z^2\} \qquad (2.82)$$

Comme dans le cas monodimensionnel, on cherche une base d'ondelettes dans l'espace vectoriel qui est le complémentaire orthogonal de ${V_j}^2$ dans $({V_{j-1}}^2$. En fait, en 2D, on exhibe non plus un,mais trois espaces vectoriels de détails ${W_j}^H$, ${W_j}^V$ et ${W_j}^D$de telle sorte que :

$$.{V_{j-1}}^2 = {V_j}^2 \oplus {W_j}^H \oplus {W_j}^V \oplus {W_j}^D \quad (2.83)$$

Si $\psi(t)$ désigne l'ondelette mère associée à l'AMR $(V_j)_{j\in Z}$, posons :

$$\psi_H(X,Y) = \varphi(X)\psi(Y) \quad (2.84)$$

$$\psi_V(X,Y) = \psi(X)\varphi(Y) \quad (2.85)$$

$$\psi_D(X,Y) = \psi(X)\psi(Y) \quad (2.86)$$

On obtient des bases ortho normales de ces trois sous-espaces vectoriels de détails par translations et dilatations/contractions de ces fonctions :

$\{\frac{1}{2^j}\psi_H\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right), (n,m)\epsilon Z^2\}$ {Base ortho normale de ${W_j}^H$} (2.87)

$\{\frac{1}{2^j}\psi_V\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right), (n,m)\epsilon Z^2\}$ {Base ortho normale de ${W_j}^V$} (2.88)

$\{\frac{1}{2^j}\psi_D\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right), (n,m)\epsilon Z^2\}$ {Base ortho normale de ${W_j}^D$} (2.89)

Les trois types d'ondelettes ainsi construites extraient les détails d'une image à différentes échelles et orientations. Les transformées de Fourier de $\varphi(t)$et $\psi(t)$étant respectivement de type « passe bas» et « passe-bande », il en découle des propriétés de sélectivité fréquentielle pour les ondelettes bidimensionnelles. Les ondelettes $\psi_H(X,Y)$ vont ainsi servir à mettre en évidence les détails de l'image de basses fréquences horizontales (suivant x) et « hautes » fréquences verticales, ce qui correspond à des contours horizontaux. Les détails de hautes fréquences horizontales et basses fréquences verticales(contours verticaux) vont être extraits à l'aide de la fonction $\psi_V(X,Y)$). Quand à l'ondelette $\psi_D(X,Y)$, elle permet de récupérer les composantes résiduelles qui sont de hautes fréquences suivant les deux dimensions de l'espace, ce que l'on appelle des détails diagonaux

La projection d'une image$s(X,Y)$ sur le sous-espace ${V_j}^2$s'interprète comme une approximation de cette image à la résolution 2^{-j} elle est donnée par la formule :

$$proj_{{V_j}^2} s(X,Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_j[n,m]\frac{1}{2^j}\varphi\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}\right)\varphi\left(\frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) \quad (2.90)$$

Avec :
$$a_j[n,m] = \ll s(X,Y), \frac{1}{2^j}\varphi\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}\right)\varphi\left(\frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) \gg \quad (2.91)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(X,Y), \frac{1}{2^j}\varphi^*\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}\right)\varphi^*\left(\frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) dx\, dy \quad (2.92)$$

où$\ll \cdots, \ldots \gg$représente le produit scalaire de $L^2(R^2)$

Comme dans le cas 1D, on dispose d'une équation récursive pour calculer des approximations de résolutions décroissantes, en exploitant les filtres de l'AMR :

$$a_j[n,m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_0^*[k-2n]\, h_0^*[l-2m] a_{j-1}[k,l] \quad (2.93)$$

Le passage entre deux approximations successives se fait donc par filtrage passe-bas 2D de réponse impulsionnelle

$$(h_0^*[-k]h_0^*[-l])_{(k,l)\in Z^2} \quad (2.94)$$

suivie d'une décimation d'un facteur 2 suivant les lignes et les colonnes de l'image. Ces traitements peuvent être séparés en une partie qui s'effectue d'abord sur les lignes et ensuite une autre qui porte sur les colonnes. On aboutit ainsi au schéma de la figure **32**où (2, 1)$\downarrow^{-}$désigne la décimation d'un facteur 2 suivant les lignes, alors que les colonnes restentin changées et (1, 2)$\downarrow$ est l'opérateur de décimation d'un facteur 2 suivant les colonnes.

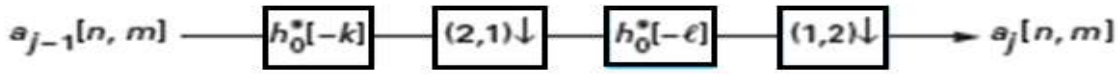


Figure 32 Calcul récursif des coefficients d'approximation dans une AMR 2D séparable

De manière analogue, on obtient les projections sur les sous espaces $W_j^{\,H}$, $W_j^{\,V}$ et $W_j^{\,D}$:

$$proj_{W_j{}^H} s(X,Y) = \sum_{n=-\infty} \sum_{m=-\infty} c_j{}^H[n,m] \frac{1}{2^j}\, \psi_H\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) \quad (2.95)$$

$$proj_{W_j{}^V} s(X,Y) = \sum_{n=-\infty} \sum_{m=-\infty} c_j{}^V[n,m] \frac{1}{2^j}\, \psi_V\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) \quad (2.96)$$

$$proj_{W_j{}^D} s(X,Y) = \sum_{n=-\infty} \sum_{m=-\infty} c_j{}^D[n,m] \frac{1}{2^j}\, \psi_D\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) \quad (2.97)$$

et les coefficients de détails verticaux, horizontaux et diagonaux sont donnés par :

$$c_j{}^H[n,m] = \ll s(X,Y), \frac{1}{2^j}\, \psi_H\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) \gg \quad (2.98)$$

$$c_j{}^V[n,m] = \ll s(X,Y), \frac{1}{2^j}\, \psi_V\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) \gg \quad (2.99)$$

$$c_j{}^D[n,m] = \ll s(X,Y), \frac{1}{2^j}\, \psi_D\left(\frac{x}{2^j} - \mathrm{n}, \frac{y}{2^j} - \mathrm{m}\right) \gg \quad (2.100)$$

On en déduit le schéma de décomposition de la figure**33** qui répartit le traitement bidimensionnel sur deux étages de bancs de filtres monodimensionnels. D'un point de vue fréquentiel, cette analyse en sous-bandes découpe approximativement le spectre des coefficients $a_{j-1}[n,m]$comme le montre la figure **34** Si l'on schématise de façon simplifiée le banc de filtres d'analyse 2D par un bloc à 1 entrée et 4 sorties, l'AMR 2D peut être implantée en cascadant ces bancs de filtres, tel que l'indique la figure**35**. Cela correspond à un raffinement de l'analyse fréquentielle dans les basses fréquences (cf. Figure 36)

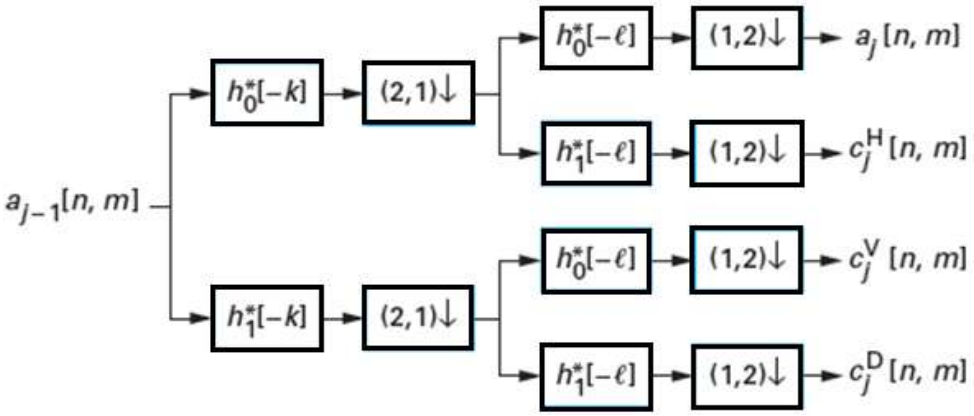
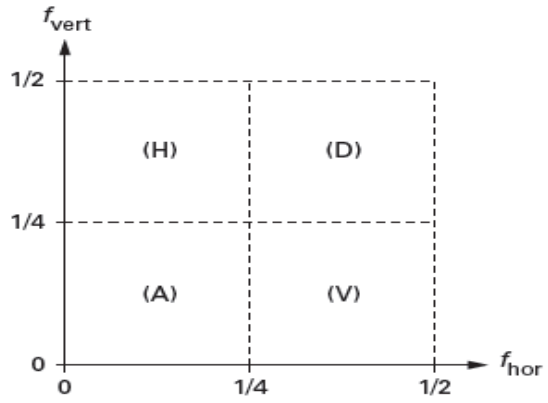


Figure 33 Banc de filtres d'analyse 2D séparables



Les zones (A), (H), (V) et (D) correspondent respectivement aux coefficients d'approximations, de détails horizontaux, verticaux et diagonaux au niveau de résolution *j*.

Figure 34 Découpage approximatif du spectre 2D du champ$a_{j-1}[n, m]$ réalisé par un banc de filtres séparables

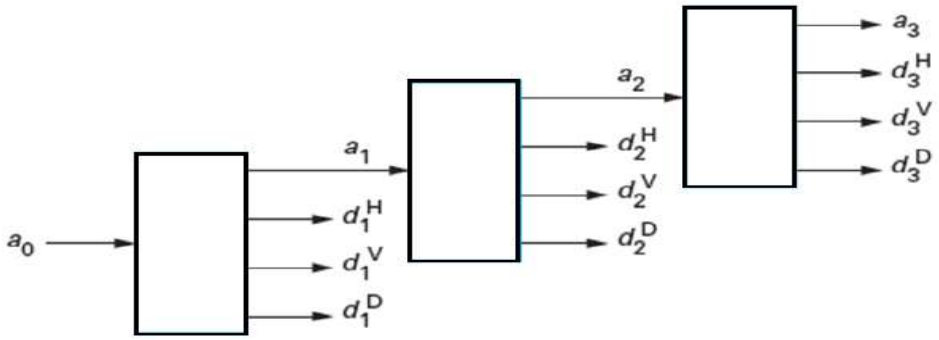
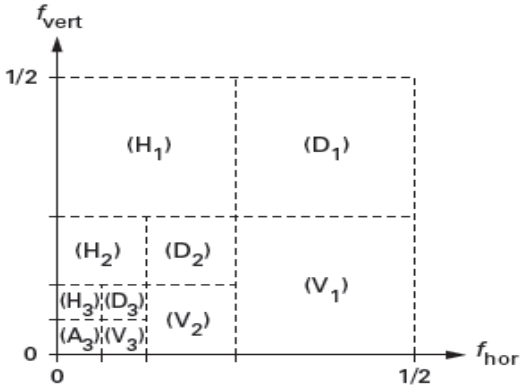


Figure 35 Mise en oeuvre d'une AMR 2D séparable sur 3 niveaux de résolution



Les zones (A_j), (M_j), (V_j) et (D_j) avec $j \in \{1,2,3\}$ correspondent respectivement aux coefficients d'approximations, de détails horizontaux, verticaux et diagonaux au niveau de résolution j.

Figure 36 Découpage approximatif du spectre 2D du champ$a_0[n,m]$ réalisé lors d'une AMR 2D séparable



Figure37 – Luminance d'une image couleur comprimée d'un facteur 42 à l'aide de JPEG2000. La figure 37 donne la luminance de l'image originale

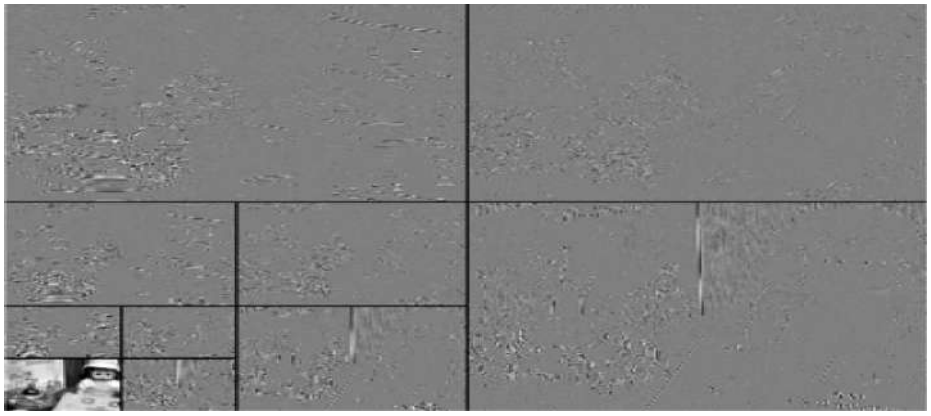


Figure 38 Coefficients d'ondelettes et d'approximation del'image de la figure 37disposés comme sur la figure 36 (mais ici dansle domaine spatial)

La reconstruction se fait en cascadant de façon séparable desbancs de filtres de synthèse monodimensionnels.

Suivant les mêmes principes que ceux que nous avons exposés,on conçoit sans difficulté des bases bi orthogonales d'ondelettes séparables multidimensionnelles. Ces décompositions bi orthogonales sont très populaires en traitement d'images [21]. Les figures **37**et **38** montrent le résultat d'une décomposition en ondelettes biorthogonales 2D.

2.3.2 Ondelettes en quinconce

Comme nous l'avons vu, les ondelettes séparables 2D possèdent des propriétés de direction alité. Par ailleurs, elles sont localisées spatialement autour de chaque point d'un réseau rectangulaire (cf. figure **39**). Or, dans certaines applications (certains systèmes d'imagerie satellite, par exemple), les données sont plutôt échantillonnés suivant un réseau quinconce (cf. figure **40**).

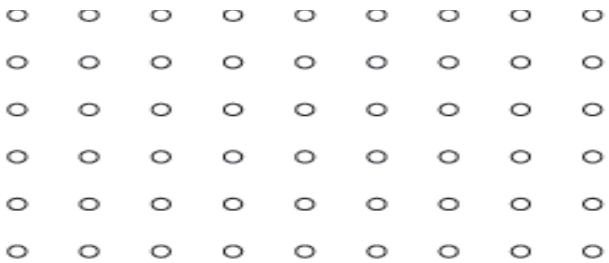


Figure 39 Échantillonnage rectangulaire

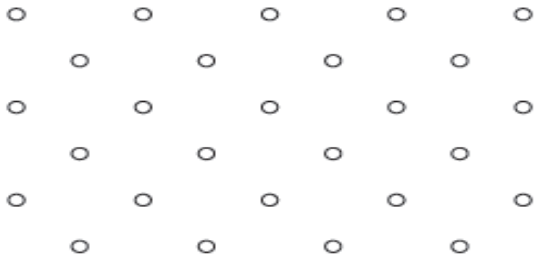


Figure 40 Échantillonnage en quinconce

Chapitre 3
Application au dé bruitage et à la compression

3.1 Application au Dé bruitage des signaux et des images

Les ondelettes et paquets d'ondelettes fournissent des moyens simples et efficaces d'estimer de façon non linéaire des signaux, en présence de bruit [22].

Partons de la situation assez commune où l'on observe un signal $r(t)$ qui est la somme d'un signal utile inconnu $s(t)$et d'un bruit aléatoire $b(t)$.Après décomposition sur une base d'ondelettes, on conserve un modèle additif :

$$,c_j^r[k] = c_j^s[k] + c_j^b[k] \quad (3.101)$$

où les lettres r, s et b servent à distinguer les coefficients d'ondelettes des différents signaux mis en jeu.

Nota**:**certaines conditions techniques [23] sont nécessaires pour pouvoir définir les coefficients d'ondelettes d'un signal aléatoire.

Par souci de simplicité, nous supposerons qu'une décomposition en ondelettes ortho normales périodiques (cf. § 2.4.3) est utilisée, de telle sorte que $1 \leq j \leq j_{max}$,et $0 \leq k \leq k2^{-j}$, le signal (à la résolution $j = 0$) étant de longueur k, multiple de $2^{j_{max}}$. Pour les coefficients d'approximation au niveau de résolution j_{max}, le rapport signal sur bruit est généralement assez élevé pour qu'on puisse considérer que, pour $k \in \{0, \ldots., 2^{j_{max}} - 1\}$

.
$$\mathrm{a}_{j_{max}}^s[k] = \mathrm{a}_{j_{max}}^r[k] \quad (3.102)$$

Le postulat sous-jacent dans les méthodes de dé bruitage à l'aide d'ondelettes est qu'un choix convenable de la base de décomposition facilite la discrimination du signal et du bruit.

En effet, le signal est généralement assez « régulier » pour pouvoir être bien décrit par un petit nombre de coefficients d'ondelettes de grande amplitude. Au contraire, le bruit, souvent blanc et stationnaire, a tendance à s'équiré partir sur toutes les composantes. Dans la suite, nous ferons l'hypothèse que $b(t)$ est un bruit blanc, gaussien, centré et de densité spectrale de puissance σ^2. Sa décomposition dans toute base ortho normale conduit donc à une suite de coefficients gaussiens, centrés et indépendants, de variance.σ^2

Tout d'abord, considérons le signal $s(t)$comme déterministe, d'énergie finie. Une méthode simple pour estimer$s(t)$, ou de façon équivalente ses coefficients d'ondelettes, consiste à produire le signal dé bruité $s\hat{}(t)$ de coefficients d'ondelettes :

$$c_j^{s\hat{}}[k] = \theta_j[k]c_j^r[k] \qquad (3.103)$$

$\theta_j[k]\epsilon[0,1]$ étant un facteur d'atténuation à appliquer à chaque composante. En règle générale, on cherche à minimiser l'erreur quadratique moyenne d'estimation, qui, compte tenu de l'hypothèse(3.104), s'écrit :

$$\zeta^2 = E\left\{\left\|s - s\hat{}\right\|^2\right\} = \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{k=0}^{k2^{-j}-1} E\left\{\left|c_j^s[k] - c_j^{s\hat{}}[k]\right|^2\right\} \quad (3.104)$$

où le symbole $E\{.\}$ désigne l'espérance de la qualité aléatoire en argument.
Les coefficients d'atténuation optimaux sont alors :

$$\theta_j[k] = \frac{\left|c_j^s[k]\right|^2}{\left|c_j^s[k]\right|^2 + \sigma^2} \qquad (3.105)$$

En pratique, cet estimateur idéal n'est pas exploitable car il nécessite de connaître les coefficients $c_j^s[k]$que l'on cherche justement à déterminer. On dit qu'il s'agit d'un oracle.

Par des techniques élémentaires de seuillage des coefficients d'ondelettes, on peut cependant approcher les performances de cet oracle. Deux autres types d'estimateurs sont couramment utilisés pour cela :

- le seuillage dur :

$$c_j^{s\hat{}}[k] = \begin{cases} c_j^r[k] & si\ \left|c_j^r[k]\right| > X \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad (3.106)$$

- le seuillage doux :

$$c_j^{s\hat{}}[k] = \begin{cases} c_j^r[k] - \mathcal{X} & si\ \left|c_j^r[k]\right| > X \\ c_j^r[k] - \mathcal{X} & si\ \left|c_j^r[k]\right| < -X \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad (3.107)$$

où la valeur du seuil $\mathcal{X}$ est un réel positif.

Pour évaluer les performances de ces estimateurs, on peut adopter une stratégie minimax, c'est-à-dire examiner quelle est l'erreur minimale atteignable pour le signal se révélant le plus défavorable.Donoho et Johnstone [24] ont montré que pour $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U = \sigma\sqrt{2\ln k}$(seuil universel), la valeur de ζ^2 obtenue est asymptotiquement (quand $k \to \infty$) du même ordre de grandeur que celle correspondant au meilleur estimateur au sens minimax. Précisons que, pour un nombre limité d'échantillons, les valeurs optimales du seuil sont inférieures à $\mathcal{X}_U$ et peuvent être calculées numériquement.

Pour mettre en œuvre ces seuillages, il est nécessaire de disposer de la variance du bruit. Lorsque celle-ci est inconnue, on peut l'estimer à partir des coefficients d'ondelettes à la résolution la plus fine ($j = 1$), en supposant que le signal varie suffisamment lentement pour que ses coefficients $(c_1^s[k])_{0\leq k<k/2}$soient négligeables. Un estimateur robuste de l'écart-type du bruit est alors donné par :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0{,}6745} Med|c_1^r| \qquad (3.108)$$

désignant la valeur médiane des coefficients

$$\{|c_1^r[k]|, 0 \leq k < k/2\} \qquad (3.109)$$

rangés par ordre croissant.

Souvent, les approches minimax fournissent des estimations trop pessimistes car elles sont optimales dans la pire des situations possibles qui, fort heureusement, est rarement celle à laquelle on se trouve confronté. Une meilleure stratégie peut consister à estimer empiriquement la valeur de l'erreur quadratique moyenne et à chercher à minimiser cette dernière pour une forme particulière de l'estimateur des données. Dans la suite, nous supposerons que les coefficients d'ondelettes du signal sont des variables aléatoires de variance finie et que, à une même résolution, ils ont la même loi de probabilité. Si l'on s'intéresse plus précisément au seuillage doux, l'erreur quadratique moyenne d'estimation, à un niveau de résolution j,

$$\zeta_j^2 = E\left\{\left|c_j^s[k] - \hat{c_j^s}[k]\right|^2\right\} \qquad (3.110)$$

peut être réécrite à l'aide de la formule de Stein [25] :

$$\zeta_j^2 = E\left\{J_X(\left|c_j^r[k]\right|^2)\right\}, \qquad (3.111)$$

où J_X est une fonction uniquement liée à la variance du bruit et auseuil :

$$J_X(u) = \begin{cases} U - \sigma^2 & si\ U \leq X^2 \\ X^2 + \sigma^2 & sinon \end{cases} \qquad (3.112)$$

L'intérêt de cette expression de ζ_j^2 est qu'elle ne dépend que des coefficients d'ondelettes du signal observé, ce qui fournit un moyen d'estimer ζ_j^2 sans biais en calculant :

$$\zeta_j^2 = \frac{1}{k2^{-j}} \sum_{k=0}^{k2^j-1} J_X(\left|c_j^r[k]\right|^2) \qquad (3.113)$$

À chaque niveau de résolution$j$, un algorithme d'optimisation simple permet alors de déterminer la valeur $X_{j,s}$ du seuil conduisant au minimum de ζ_j^2 [26]. L'avantage de cette méthode (appelée sureshrink dans la littérature anglo-saxonne) est donc qu'elle s'ajuste automatiquement aux données à traiter.

La figure **44** compare les performances de sureshrink à celles du seuillage universel pour un signal Doppler. Les rapports signal sur bruit (RSB) sont donnés à titre indicatif. Bien que le résultat fourni par le seuillage universel puisse apparaître meilleur visuellement, cette méthode a tendance à trop fortement lisser le signal.

Les deux stratégies précédentes n'utilisent aucune connaissance statistique a priori sur le signal à estimer. Pourtant, la littérature, abondante sur les approches bayé siennes, montre que l'exploitation de telles informations (quand elles sont fiables) permet d'améliorer sensiblement les performances d'estimation. Aussi n'est-il pas surprenant que, dans un ensemble de travaux plus récents [27] on ait étudié le couplage d'approches bayé siennes à des représentations multi résolution.

À titre d'exemple, considérons une modélisation Bernoulli-gaussienne des coefficients d'ondelettes du signal aléatoire $s(t)$.Ce modèle est défini à l'aide de variables aléatoires « cachées » $q_j[k]$ qui sont binaires, indépendantes et telles que chaque composante$c_j^s[k]$de $s(t)$. est :

- soit porteuse d'information, quand $q_j[k] =1$
- soit nulle, quand $q_j[k] = 0$

On suppose que le premier cas de figure se produit avec une probabilité$P\big(q_j[k] = 1\big) = \varepsilon_j$ (généralement petite) et que les coefficients $c_j^s[k]$ Sont alors gaussiens, centrés, de variance σ_j^2soushypothèses, l'estimateur du Maximum A Posteriori de $q_j[k]$ est donné par :

$$\acute{q}_j[k] = \begin{cases} 1 \; si \;\; \left|c_j^r[k]\right| > \mathcal{X}_{J,B} \\ 0 \quad sinon \end{cases} \quad (3.114)$$

où $\mathcal{X}_{j,B} \geq 0$est un seuil qui est fonction de σ^2,σ_j^2et ε_j mais qui est indépendant de la durée du signal [28]. Rappelons que, au contraire, le seuil universel croît en fonction du nombre de données, ce qui n'est pas très satisfaisant pour des signaux de longue durée.

Finalement,les composantes du signal sont estimées par une règle de seuillage qui réalise une forme de compromis entre une estimation linéaire en moyenne quadratique et un seuillage dur :

$$c_j^{\acute{s}}[k] = \begin{cases} \dfrac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \sigma^{2^{c_j^r[k]}}} & si \;\; \acute{q}_j[k] = 1 \\ 0 \;\; sinon \end{cases} \quad (3.115)$$

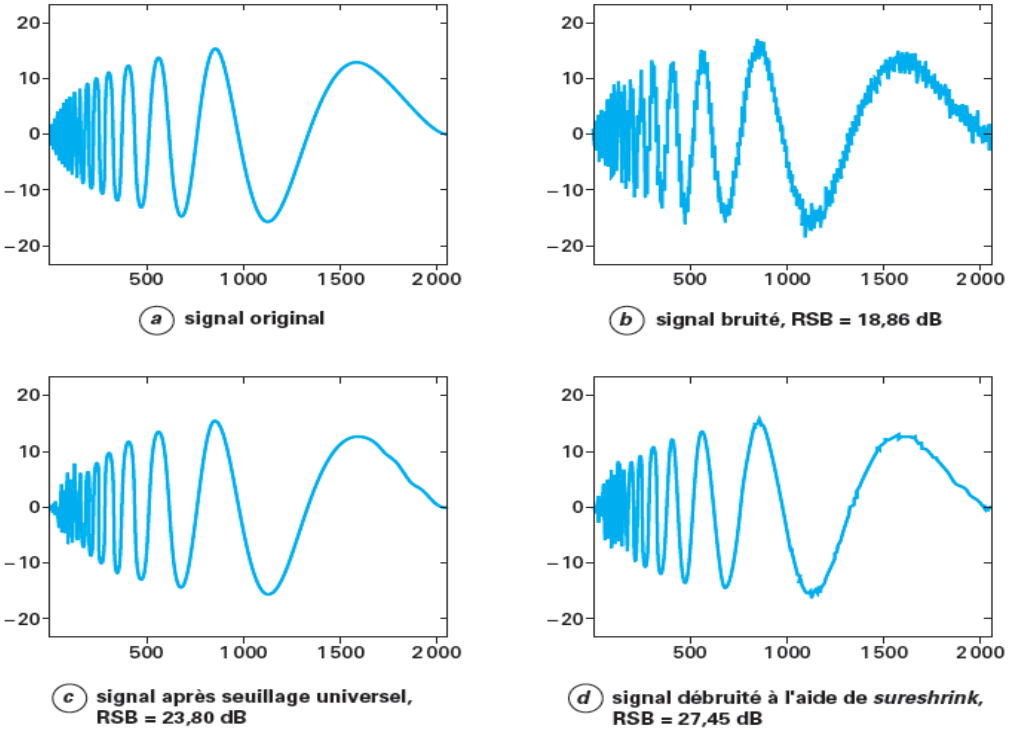


Figure 41 Exemple de dé bruitage

D'autres types d'estimateurs peuvent cependant être mis en évidence si l'on change d'a priori, en recourant par exemple à des distributions gaussiennes généralisées [29]. Un point délicat dans ces méthodes bayé siennes est la détermination des paramètres du modèle statistique ($\varepsilon_j$et σ_j^2, dans le cas de Bernoulli-gaussien). Pour estimer ces paramètres, on doit généralement employer des méthodes itératives (maximum de vraisemblance généralisé, algorithme EM [30], méthodes MCMC [31]…). Les diverses solutions envisageables correspondent à des compromis performance/complexité différents.

Les principes des méthodes de dé bruitage que nous venons de présenter peuvent être appliqués à des décompositions en paquets d'ondelettes, qui conduisent généralement à une amélioration de la qualité des estimations réalisées. Pour le choix de la meilleure base ,il est alors préférable d'utiliser un critère propre au dé bruitage, défini, par exemple, à l'aide de la fonction $J_{X_{J,S}}$introduite ci-dessus (voir aussi [32]).

Il faut aussi souligner que l'utilisation de représentations invariantes par translation (cf. paragraphe 4) permet presque systématiquement de réduire le niveau de bruit de manière plus efficace.

Pour conclure, signalons que des problèmes similaires à ceux de dé bruitage se posent pour l'estimation de densités de probabilité [33] ou de densités spectrales de puissance [34], pour la construction de tests statistiques [35] ainsi qu'en dé convolution [36]

3.1.1 Dé bruitage des signaux

Cet exemple traite du problème de la récupération du signal à partir de données bruitées. La procédure générale de dé bruitage comporte trois étapes. La version de base de la procédure suit les étapes décrites ci-dessous :

- Décomposer : Choisissez une ondelette, choisissez un niveau N. Calculez la décomposition en ondelettes du signal au niveau N.
- Coefficients de détail de seuil : Pour chaque niveau de 1 à N, sélectionnez un seuil et appliquez un seuillage doux aux coefficients de détail.
- Reconstruire : calculez la reconstruction d'ondelettes en utilisant les coefficients d'approximation d'origine du niveau N et les coefficients de détail modifiés des niveaux de 1 à N.

Deux points doivent être particulièrement abordés :

- comment choisir le seuil,
- et comment effectuer le seuillage.

3.1.1.1 Seuil doux ou dur

Le seuillage peut être effectué à l'aide de la fonction WTHRESH qui renvoie un seuillage doux ou dur du signal d'entrée. Le seuillage dur est la méthode la plus simple, mais le seuillage doux a de belles propriétés mathématiques. Soit thr le seuil. thr = 0,4 ;

Le seuillage dur peut être décrit comme le processus habituel de remise à zéro des éléments dont les valeurs absolues sont inférieures au seuil. Le signal de seuil dur est x si x>thr, et vaut 0 si x<=thr

Le seuillage doux est une extension du seuillage dur, en mettant d'abord à zéro les éléments dont les valeurs absolues sont inférieures au seuil, puis en réduisant les coefficients non nuls vers 0. Le signal de seuil doux est sign(x)(x-thr) si x> thr et vaut 0 si x<=thr.

Dans ce programme on donne thr = 0,4 et on considère que la relation de y en fonction de x par y=sqrt(x)(par example) puis à l'aide de fonction matlab (wthresh)qui donne l'expression de ythard = wthresh(y,'h',thr);

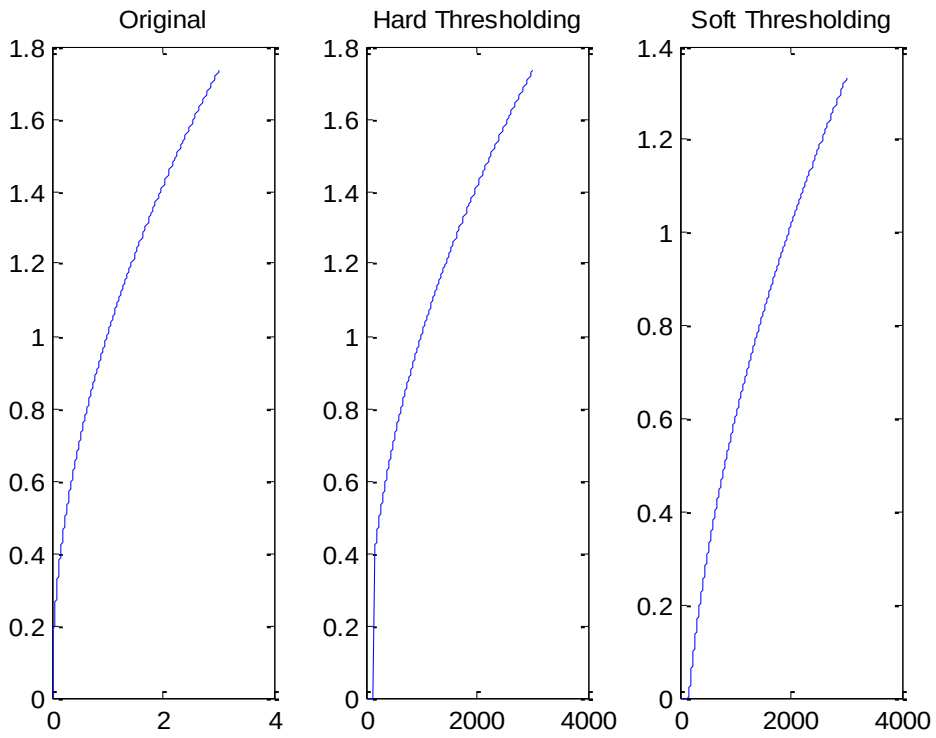


Figure 42-les graphes de Seuil doux et dur qui va obtenue par matlab à partir de signal d'origine

Comme on peut le voir dans la figure ci-dessus, la procédure dure crée des discontinuités à x = t, contrairement à la procédure douce.

3.1.1.2 Règles de sélection de seuil

En rappelant l'étape 2 de la procédure de dé bruitage, la fonction THSELECT effectue une sélection de seuil, puis chaque niveau est seuillé. Cette deuxième étape peut être réalisée à l'aide de WTHCOEF, gérant directement la structure de décomposition en ondelettes du signal d'origine. Quatre règles de sélection de seuil sont implémentées dans la fonction THSELECT. Typiquement il est intéressant de les montrer en action lorsque le signal d'entrée est un bruit blanc gaussien

Règle 1 : Sélection en utilisant le principe de Stein's Unbiased Risk Estimate (SURE)

Règle 2 : Seuil de forme fixe égal à sqrt(2*log(length(y)))

Règle 3 : Sélection utilisant un mélange des deux premières options

Règle 4 : Sélection selon le principe minimax

Les règles de sélection des seuils Minimax et SURE sont plus conservatrices et seraient plus pratiques lorsque de petits détails du signal se trouvent près de la plage de bruit. Les deux autres règles suppriment le bruit plus efficacement.

Utilisons les données de test "blocs" créditées à Donoho et John stone comme premier exemple. Générer le signal original xref et une version bruitée x ajoutant un bruit blanc gaussien standard

Dé bruitage du signal bruité à l'aide d'un seuillage SURE heuristique souple sur des coefficients de détail obtenus à partir de la décomposition de x, au niveau 3 par l'ondelette sym8

Dans ce programme on essayé d'appliquer les ondelettes au l' addition et l élimination des bruits sur des signaux électriques pour cela on ajoute un bruit au signal orignal puis on élimine cette bruit on trouve un signal proche de signal qui est au début. pour le bruitage on utilise la formule [xref,x] = wnoise(1,11,sqrt_snr,init)avec sqrt_snr c'est Définir le rapport signal sur bruit, et l'init Définir la graine de rand les deux sont connus à l' avance cette formule renvoie les vecteurs précédents x et xref, mais la valeur de départ du générateur est définie sur la valeur INIT.

avec on utilise le modèle en supposant un bruit blanc gaussien standard et pour l'élimination de bruit on s'agit la fonction wden qui fait la dé bruitage unidimensionnelle.qui effectue ce processus de manière automatique d'un signal unidimensionnel à l'aide d'ondelettes les resutlats de ce prog est donné par les graphes suivants

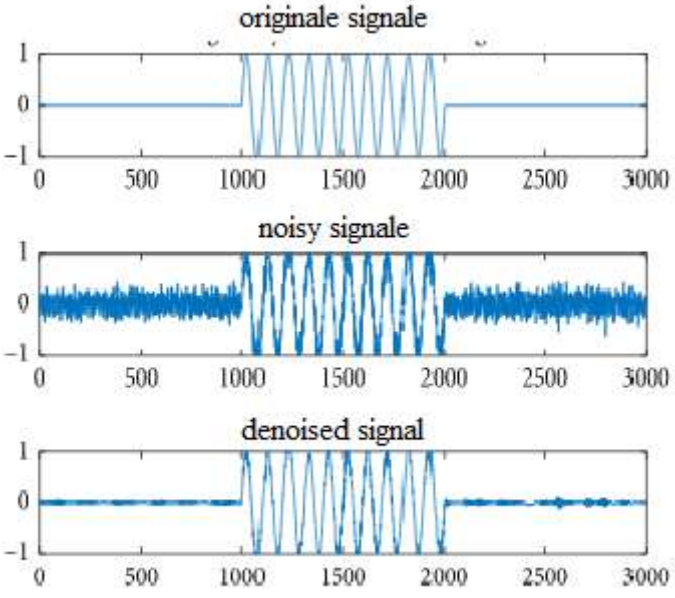


Figure 43 –les graphes de signal initial, bruité et dé bruité par matlab

Étant donné que seul un petit nombre de grands coefficients caractérisent le signal d'origine, la méthode fonctionne très bien.

On remarque que les derniers signaux sont bien dé bruité et bruité respectivement alors on trouve un résultat important et c'est que les ondelettes sont trés efficaces au l'opération de dé buitage et bruitage sur les signaux électriques

3.1.1.3 Gérer le bruit non blanc

Lorsque vous suspectez un bruit non blanc, les seuils doivent être redimensionnés par une estimation dépendant du niveau du bruit de niveau. Comme deuxième exemple, essayons la méthode sur la partie très perturbée d'un signal électrique. Utilisons l'ondelette db3 et décomposons au niveau 3. Pour traiter la nature du bruit composite, essayons une estimation de la taille du bruit en fonction du niveau

Dans ce programme après le chargement de signal électrique on sélectionne juste une parie de lui et on trouve la première valeur pour l'éviter les effets de bord donc on pose deb = x(1) avec Signal de dé bruitage à l'aide d'un seuil de forme fixe et d'une option de bruit inconnu.et on utiliser l'estimation dépendant du niveau de bruit et les résultats sont donnés par les graphes suivants

Le résultat est assez bon malgré l' hétérogénéité temporelle de la nature du bruit après et avant le début de la panne du capteur vers 2450.

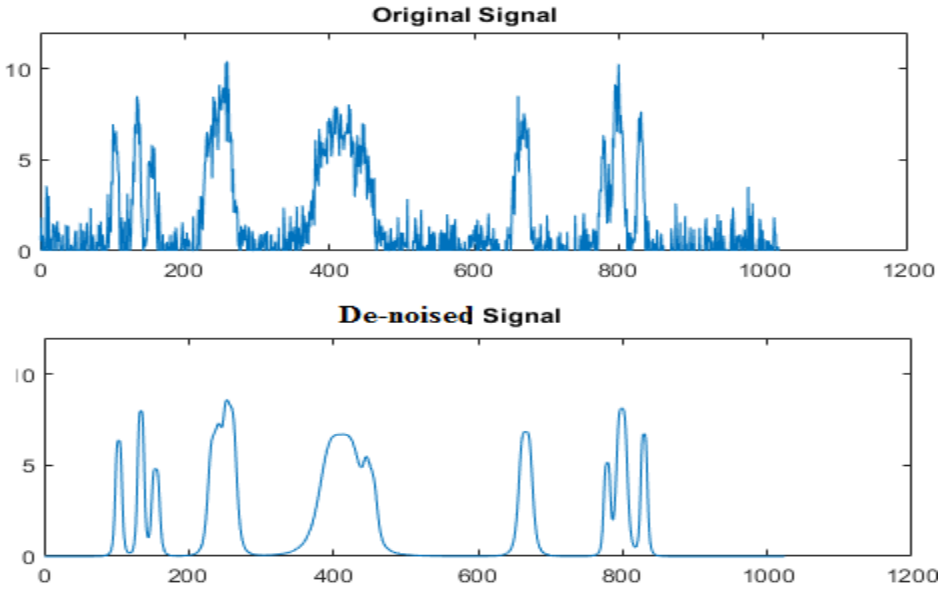


Figure 44- le graphe de dé bruitage avec son signal d'origine qui obtenue par matlab

3.1.2 Dé bruitage d'image

La méthode de dé bruitage décrite pour le cas unidimensionnel s'applique également aux images et s'applique bien aux images géométriques. La procédure de dé bruitage bidimensionnel comporte les trois mêmes étapes et utilise des outils d'ondelettes

3.1.2.1 Générer une image bruitée

Dans ce cas, un seuil de forme fixe est utilisé avec l'estimation du niveau de bruit, le mode de seuillage est doux et les coefficients d'approximation sont conservés. Image de dé bruitage à l'aide de l'option de seuillage global

Dans ce programme on charger une image et on ajout un bruit comme d'habitude mais par la fonction randn qui renvoie une matrice n par n avec n=size(x)de valeurs dérivées et Dans ce cas, un seuil de forme fixe est utilisé avec l'estimation du niveau de bruit, le mode de seuillage est doux et les coefficients d'approximation sont conservés. La fonction fondamentale c'est ddencmp qui donne des valeurs par défaut pour toutes les procédures générales liées au dé bruitage et à la compression de signaux à une ou deux dimensions, en utilisant des ondelettes ou des paquets d'ondelettes. et son formule c'est [thr,sorh,keepapp] = ddencmp('den','wv',x)c-a-dire renvoie les valeurs par défaut pour le dé bruitage

si Image de dé bruitage à l'aide de l'option de seuillage global on a deux ieme fonction c'est wdencmp c'est une fonction de dé bruitage et de compression à une ou deux dimensions. qui

effectue un processus de dé bruitage ou de compression d'un signal ou d'une image, à l'aide d'ondelettes. Et son formule est donné par xd = wdencmp('gbl',x,'sym4',2,thr,sorh,keepapp); qui a les mêmes arguments de sortie, en utilisant les mêmes options que ci-dessus, mais obtenus directement à partir de la structure de décomposition en ondelettes d'entrée x du signal à dé bruiter ou à compresser, au niveau N=2 et en utilisant l'ondelette sym4'.

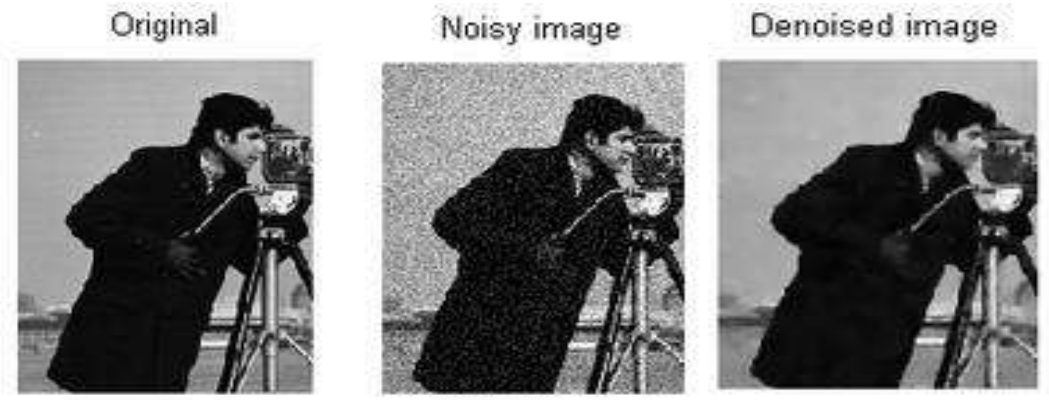


Figure 45 –les images originals, bruité et dé bruité résultants sous matlab

On remarque que l'image qui est u centre est bien bruité et le troisième est bien dé bruité et ca ce qui confirme l'efficacité d'ondelette alors les ondelettes est très efficace dans l'opération de dé bruitage dans le cas des images

3.2 Conclusion

Les méthodes de dé bruitage basées sur la décomposition en ondelettes sont l'une des applications les plus importantes des ondelettes. Plus de détails peuvent être trouvés dans la section de la documentation intitulée "En savoir plus sur les stratégies de seuil".

3.3 Compression d'images :

Le domaine d'applications dans lequel les ondelettes ont sans doute eu l'impact le plus important est la compression d'images [37].Cela est dû en grande partie aux excellentes performances en compression qui sont obtenues par les algorithmes à base d'ondelettes.

Une autre raison de ce succès est l'introduction de fonctionnalités de scalabilité en résolution et en qualité qui seront évoquées par la suite.

L'amélioration de l'efficacité de codage par rapport aux schémas de type MICD (Modulation d'Impulsions Codées Différentielle ment)ou aux techniques basées sur la TCD (Transformée en Cosinus Discrète)s'explique par une meilleure concentration de l'énergie réalisée par les décompositions en ondelettes et l'absence d'« effets de blocs ». Un autre facteur de gain est le développement d'algorithmes de compression capables de prendre en compte de manière efficace les dépendances hiérarchiques entre les coefficients d'ondelettes dans les différentes sous-bandes. Nous allons maintenant détailler quelques points essentiels d'un algorithme de compression à base d'ondelettes comme le choix des filtres, ou l'utilisation d'« arbres de zéros » dans la stratégie de codage des coefficients.

Nous n'expliciterons pas le fonctionnement des modules de quantification ou de codage entropique [38] qui jouent un rôle tout aussi important mais qui ne sont pas spécifiques à un codeur à base d'ondelettes.

3.3.1 Choix des filtres

La plupart des systèmes de compression d'images à l'aide d'ondelettes exploitent des décompositions 2D séparables. Le choix des bancs de filtres influe fortement sur les performances du système[39]. Les décompositions ortho normales assurent une erreur de reconstruction égale à l'erreur de quantification des coefficients et sont, pour cette raison, simples à utiliser mais elles ne conduisent pourtant pas aux meilleurs résultats. D'autres caractéristiques, comme la longueur des filtres employés [40] ou la régularité peuvent se révéler plus importantes.

Des décompositions bi orthogonales sont souvent préférées car elles permettent d'employer des filtres à phase linéaire, bien localisés spatialement. Plus précisément, des bancs d'analyse avec des filtres passe-bas longs et passe-haut courts sont généralement adoptés [41] car ils s'adaptent bien aux caractéristiques des images naturelles : l'information basse-fréquence provient des régions homogènes ayant un support spatial étendu, tandis que l'information haute-fréquence est liée aux contours, qui sont de supports limités. La longueur des filtres peut aussi être réduite au fur et à mesure que le niveau de décomposition augmente. Cela permet d'atténuer les effets d'oscillation (ringing) dus à la quantification des coefficients au voisinage des contours. Pour les premiers niveaux de décomposition, l'utilisation de filtres assez longs évite la création d'« effets de blocs ».

Par ailleurs, l'utilisation de filtres dont les réponses impulsionnelles présentent des propriétés de symétrie est intéressante pour le traitement des bords de l'image. On parvient

ainsi à éviter la création d'« effets de bord » en étendant l'image, au-delà de ses frontières, par symétrisation « miroir ». Parmi les paires de filtres bi orthogonaux les plus fréquemment utilisés, citons les 9/7, 5/3, 9/3 et18/10. Il est difficile de dire quel est le « meilleur » banc de filtres, car différents critères d'optimisation peuvent être employés. Par ailleurs, une décomposition peut s'avérer adaptée à une classe d'images et être sous-optimale pour d'autres types d'images.

Signalons enfin que deux types de compression peuvent être distingués:

- ✓ les techniques sans perte permettent, après compression puis reconstruction, de retrouver parfaitement l'image d'origine. Les codeurs sans perte à base d'ondelettes nécessitent des adaptations des bancs de filtres usuels de façon à préserver le caractère entier des données [42]. L'inconvénient de ces méthodes est d'être limitées à des taux de compression modestes ;
- ✓ les techniques avec pertes autorisent certaines altérations del'image de façon à pouvoir la comprimer plus fortement. La distorsion introduite par la compression doit cependant être aussi faible que possible.

Dans la suite, nous allons porter notre attention sur ces dernières méthodes.

3.3.2 Stratégies de codage

Une première stratégie pour coder les coefficients d'ondelettes consiste à employer des algorithmes qui ne prennent pas explicitement en compte les spécificités de l'AMR réalisée. Ces algorithmes suivent la démarche classique pour un codage par transformée, à savoir : une allocation de bits entre les différentes sous-bandes, une quantification des coefficients dans chaque sous-bande et, enfin, un codage entropique. Pour chaque sous-bande, le quantificateur peut être conçu de manière optimale si l'on connaît la loi de probabilité des coefficients auxquels il s'applique (quantificateur de Lloyd-Max [43]). Le codeur entropique peut être un simple codeur de Huffmann, ou il peut adapter le calcul des probabilités de chaque code en fonction des valeurs des coefficients voisins de celui qu'on est en train de coder (codage contextuel). De cette manière, on exploite les corrélations résiduelles intra bandes. Une quantification vectorielle des coefficients peut conduire à une amélioration de l'efficacité de codage, au prix d'une charge de calcul plus lourde [44].

Une autre stratégie souvent plus profitable consiste à exploiter les dépendances hiérarchiques entre les coefficients d'ondelettes. La méthode la plus connue de ce type est l'EZW (Embedded Zerotreesof Wavelet coefficients) [45]. Elle est basée sur une

décomposition en ondelettes, mais son principe reste valable pour d'autres décompositions en sous-bandes. Les principaux ingrédients de cet algorithme sont :

- une prédiction de l'information non significative d'une échelle à l'autre, en exploitant l'autosimilarité (cf. paragraphe 6.3) souventprésente dans les images naturelles ;
- une quantification par approximations successives ;
- un codage sans perte, réalisé à l'aide d'un codeur arithmétique adaptatif [46].

Précisons d'abord un point de vocabulaire. Un coefficient situé dans une sous-bande de résolution j et indexé spatialement par (m, n)est appelé **parent** des coefficients situés dans les sous-bandes de plus haute résolution $j' < j$ et qui correspondent à la même orientation(horizontale, verticale ou diagonale) et à la même position spatiale dans l'image originale (cela correspond à des coefficients d'ondelettes d'indices $(2^{j-j'}m + k, 2^{j-j'}n + l)$avec $(k, l) \in \{0, \ldots\ldots, 2^{j-j'} - 1\}^2$)Ces derniers sont ses **descendants**. Un coefficient situé dans une dessous-bandes de plus basse résolution j_{max}, et tous ses descendants,forment un **arbre** (voir figure **41**). Tous les coefficients de la décomposition sont ainsi regroupés en arbres spatiaux.

La première caractéristique que nous avons mentionnée pour l'algorithme EZW part de l'hypothèse que, si un coefficient d'ondelettes d'une sous-bande de basse résolution est inférieur à un seuil donné, alors tous les autres coefficients, correspondant à la même position dans l'image et se trouvant dans les sous-bandes de plus haute résolution ayant la même orientation, ont une forte probabilité d'être aussi inférieurs à ce seuil. Par conséquent, en examinant la valeur d'un seul coefficient à basse résolution, on peut prédire l'absence d'information significative dans toute une ramification de l'arbre (d'où le nom de l'algorithme).

L'EZW procède de manière itérative. À l'initialisation, un ordre de parcours des sous-bandes est fixé (voir figure **42**), ainsi que le seuil initial, en général égal à la moitié du plus grand coefficient q_{max}. À la i -ième$i^{-iéme}$ itération, deux « passes » sont exécutées :

1. Une première passe, dite dominante, dans laquelle l'information de signifiance est codée. Un coefficient est jugé significatif si sa valeur absolue est supérieure au seuil. Quatre codes sont utilisés :

- P, si le coefficient est significatif et positif ;

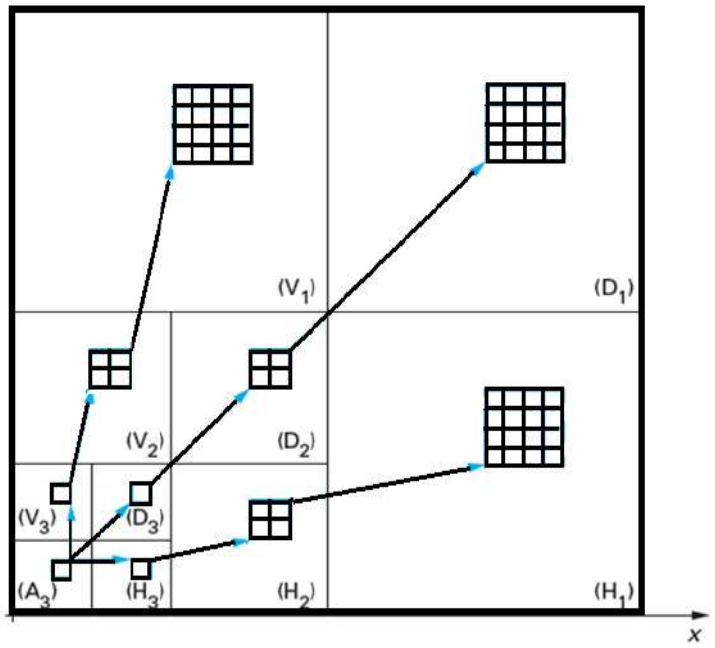


Figure 46 Regroupement en arbres des coefficientsd'ondelettes dans l'algorithme EZW (cas d'une décomposition sur 3 niveaux de résolution)

- N, si le coefficient est significatif et négatif ;
- AZ (arbre de zéros), si le coefficient n'est pas significatif et sitous ses descendants sont également non significatifs ;
- ZI (zéro isolé), si le coefficient n'est pas significatif, mais s'ila des descendants significatifs.

À la fin de ce traitement, le seuil est divisé par 2, en vue de la prochaine itération

2. Une passe de **raffinement**, au cours de laquelle on quantifie les coefficients significatifs sur l'intervalle $]\frac{q_{max}}{2^j}, q_{max}]$ avec un pas de quantification $\frac{q_{max}}{2^{j+1}}$.

Si l'on considère une représentation binaire des coefficients, cette deuxième passe peut être vue comme un raffinement successif, bit par bit, des coefficients codés (donc considérés significatifs) dans les étapes précédentes de l'algorithme.

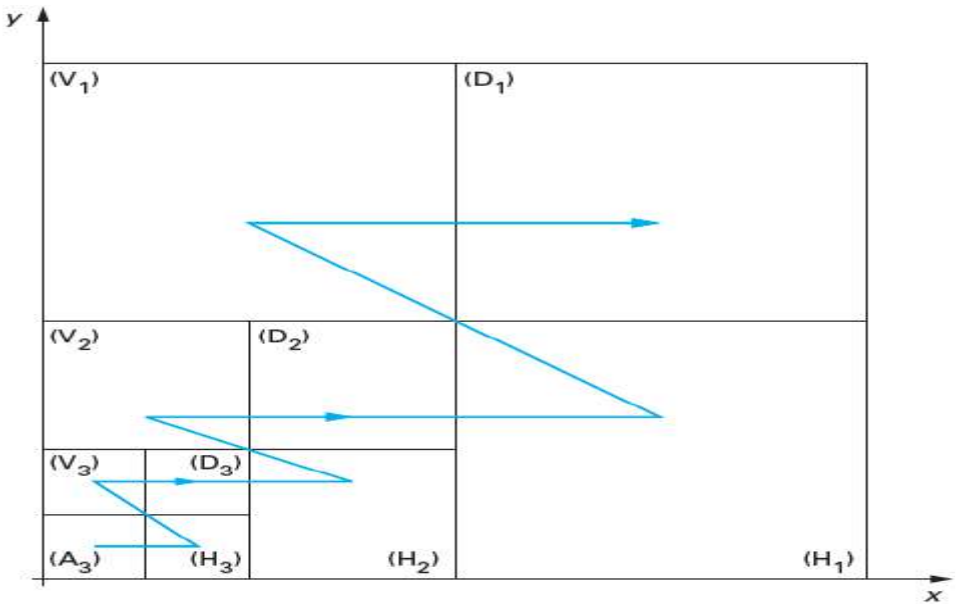


Figure 47 - Ordre de balayage des sous-bandes dans l'algorithmeEZW (cas d'une décomposition sur 3 niveaux de résolution)

L'algorithme EZW, ainsi que ses nombreuses variantes et améliorations ([47], [48]…), a l'avantage de fournir dans le flux de bits qui est généré une représentation progressive de l'image, allant des informations les plus significatives vers les moins importantes. On a ainsi la possibilité d'arrêter le codage ou le décodage à tout moment, ce qui est essentiel dans de nombreuses applications où il existe des limitations de débit ou de puissance de calcul. La capacité d'un codeur (ou décodeur) à « couper » à un certain débit le flux codé, en obtenant par décodage la « meilleure » qualité compatible avec ce débit, est appelée **scalabilité en qualité** (ou en SNR). Cette propriété est fondamentale pour les codeurs d'images ou vidéo dans les standards actuels et futurs. En effet, on assiste à une généralisation de la transmission d'information visuelle sur des réseaux hétérogènes, avec des conditions de transport (débit, taux d'erreurs…)variables, alors que utilisateurs ont également des capacités de décodage différentes.

Pour les mêmes raisons, certaines applications peuvent avoir besoin de décoder l'image ou la vidéo à une résolution spatiale inférieure.

Dans ce cas, le flux doit être organisé de telle manière qu'il puisse être « coupé » à la résolution souhaitée. Cette capacité définit un codeur **scalable (ou échelonnable) en résolution**. Avec une décomposition en ondelettes, il est très facile de hiérarchiser le flux en transmettant les sous-bandes par niveau de résolution, en allant de la plus basse vers la plus haute résolution.

3.3.3 Compression vidéo

La compression des séquences vidéo est le plus souvent réalisée à l'aide de schémas prédictifs [49]. Dans ces méthodes, on peut substituer une décomposition en ondelettes à la TCD traditionnellement employée pour le codage de l'erreur de prédiction. Cette erreur correspond à la différence entre la trame courante et la trame de référence (en général, la précédente) dont on a compensé le mouvement [50]. Dans ce contexte, il faut tenir compte du fait quelles algorithmes d'estimation de mouvement par appariement de blocs (du type block matching) créent des « effets de blocs ». Ces artefacts se produisent sur les bords des blocs qui ont servi à l'algorithme de recherche. Par conséquent, l'image d'erreur de prédiction va présenter à ces endroits des contours artificiels et sa décomposition en ondelettes va conduire à des coefficients de forte amplitude, difficiles à coder.

Il est donc nécessaire de prendre certaines précautions en ce qui concerne la mise en oeuvre des algorithmes d'estimation et de compensation du mouvement. Par exemple, si l'on utilise une méthode de type block matching (pour sa simplicité et ses bonnes performances globales), une compensation de mouvement avec chevauchement (overlapped block matching compensation) doit être mise en place. On peut également en visager l'emploi d'estimateurs de mouvement, comme ceux pel-récursifs, qui ne souffrent pas de ce type d'artefacts.

Une solution alternative à ces approches prédictives est basée sur une décomposition en ondelettes 3D. L'idée est de réaliser une décomposition en ondelettes 1D dans la direction temporelle, suivie d'une AMR spatiale des sous-bandes temporelles résultantes. Plus intuitivement, la séquence vidéo peut être découpée temporellement en **groupes de trames**, qui peuvent être vus comme des volumes de pixels auxquels on applique une décomposition en ondelettes tridimensionnelle. Celle-ci peut se faire sans compensation de mouvement préalable, mais l'expérience montre que, dans ce cas, l'énergie des sous-bandes haute-fréquence reste élevée et le codage n'est pas d'une grande efficacité. Afin de mieux concentrer l'énergie dans la sous-bande d'approximation spatio-temporelle, une estimation/compensation de mouvement est réalisée avant le filtrage temporel

Après cette opération, les pixels qui se correspondent dans les trames successives sont alignés et le filtrage temporel se fait suivant la direction du mouvement. Précisons que, dans la pratique, on utilise souvent des filtres de Haar pour l'analyse temporelle.

Les avantages d'une décomposition en sous-bandes 3D pour le codage vidéo sont notamment :

- une structure non récursive, qui évite la propagation des erreurs pouvant se produire lors de la transmission ou du stockage des images comprimées ;
- la possibilité d'obtenir facilement une scalabilité temporelle,en même temps qu'une scalabilité spatiale. Cette scalabilité temporelle est liée à la possibilité de décoder la séquence à différentes cadences. En ajoutant un codage progressif de l'information, du type SPIHT (Set Partitioning in Hierarchical Trees) [54], on introduit également une scalabilité en qualité.

3.3.4 Standards de compression utilisant des ondelettes

Parmi les standards actuels de compression d'image fixes ou de vidéo qui exploitent des décompositions en ondelettes, on peut mentionner JPEG2000 (Joint Picture Expert Group), H26L et la partie codage d'images fixes de MPEG-4 (Motion Picture Expert Group).H26L et son prédécesseur H263 sont des standards proposé par l'ITU (International Telecommunication Union), essentiellement pour des applications de visiophonie. H26L reprend les orientations générales de H263, en proposant de remplacer la TCD, appliquée dans H263 à l'erreur de prédiction, par une décomposition en ondelettes. MPEG-4 est une norme de compression destinée aux applications vidéo interactives. MPEG-4 offre la possibilité de coder des images fixes par un algorithme proche de EZW. La différence essentielle réside dans la façon de coder la sous-bande d'approximation, qui est comprimée séparément par une technique MICD. Les filtres de décomposition ont été normalisés et ce sont les filtres biorthogonaux9/7 qui ont été retenus. JPEG2000 est une nouvelle norme de compression d'images fixes qui est entièrement basée sur un codage à l'aide d'ondelettes.

Deux types de fonctionnement sont possibles :

- le mode sans perte, pour lequel il est recommandé d'utiliser un« lifting » s'inspirant des filtres bi orthogonaux 5/3, qui transforme les entiers en des entiers ;
- le codage avec pertes, pour lequel les filtres bi orthogonaux 9/7 sont préconisés.

Notons qu'en tronquant plus ou moins le flux de bits générés dans le mode sans perte, on peut reconstruire une image de plus ou moins bonne qualité. On a ainsi la possibilité, avec le même algorithme, de passer progressivement d'une compression avec perte àune compression sans perte.

La méthode de codage est inspirée de l'algorithme EBCOT(Embedded Block Coding with Optimized Truncation) . Les étapes principales sont les suivantes.

1. Une décomposition en ondelettes suivant un des modes décrits ci-dessus.

2. Un découpage de chaque sous-bande en blocs de taille fixe (par exemple, 32 ´ 32 ou 64 ´ 64), qui seront codés indépendamment.

Ce partitionnement a l'avantage de permettre un accès facile à différentes parties de l'image et, en particulier, laisse la possibilité de la décoder dans un ordre différent de celui utilisé à l'encodage. Par ailleurs, cette opération limite la mémoire nécessaire lors de l'implantation matérielle et autorise également une parallélisassions des traitements.

3. Une quantification scalaire uniforme avec « zone morte » des coefficients d'ondelettes. Le pas de quantification peut être différent dans chaque sous-bande.

4. Un codage en plusieurs « passes » des coefficients quantifiés :pour chaque plan de bits, les coefficients sont balayés suivant un ordre spécifique. Les bits indiquant les coefficients devenus significatifs à ce niveau font l'objet d'un codage arithmétique contextuel tenant compte de l'orientation de la sous-bande où se trouve le coefficient. Des contextes plus simples sont employés pour le codage des bits de raffinement. Ceux-ci servent à décrire les coefficients déjà répertoriés comme significatifs lors des passes antérieures. Tous les autres bits sont codés à l'aide d'une technique « run-length ».

5. Une allocation de débit entre les flux de bits correspondant aux différents blocs, qui permet de les coder avec des qualités variables, en exploitant éventuellement des critères d'appréciationpsychovisuelle.JPEG2000 permet également de traiter différemment des « régions d'intérêt » (ROI pour regions of interest), les coefficients d'ondelettes correspondant à ces zones étant codés en priorité. La figure **43** montre un exemple de compression d'image à l'aide de JPEG2000.



Figure 48 Luminance d'une image couleur comprimée d'un facteur42 à l'aide de JPEG2000. La figure 37 donne la luminance de l'image originale

3.4 Application à la compression d'images :

Le but de cet exemple est de montrer comment compresser une image à l'aide d'une analyse par ondelettes bidimensionnelle. La compression est l'une des applications les plus importantes des ondelettes. Comme le dé bruitage, la procédure de compression comprend trois étapes :

• Décomposer : Choisissez une ondelette, choisissez un niveau N. Calculez la décomposition en ondelettes du signal au niveau N.

• Coefficients de détail de seuil : Pour chaque niveau de 1 à N, un seuil est sélectionné et un seuillage strict est appliqué aux coefficients de détail.

• Reconstruire : calculez la reconstruction d'ondelettes en utilisant les coefficients d'approximation d'origine du niveau N et les coefficients de détail modifiés des niveaux de 1 à N.

La différence avec la procédure de dé bruitage se trouve à l'étape 2. Il existe deux approches de compression disponibles :

• La première consiste à prendre l'expansion en ondelettes du signal et à conserver les plus grands coefficients en valeur absolue. Dans ce cas, vous pouvez définir un seuil global, une performance de compression ou une performance de récupération de norme quadratique relative. Ainsi, un seul paramètre doit être sélectionné.

• La seconde approche consiste à appliquer des seuils dépendants du niveau déterminés visuellement.

3.4.1 Chargement d' une image…

Examinons un exemple réel de compression pour un choix d'ondelettes donné et non optimisé, afin de produire une récupération de norme carrée presque complète pour une image.

On charger une image puis on lire cette image par la fonction loading avec la sélection de ROI (L'affichage De Matlab Donn La Figure Suivants)



Figure 49-l'image qui on a chargé dans matlab

3.4.2 Méthode 1 : Seuil global

Les caractéristiques de compression d'une base d'ondelettes donnée sont principalement liées à la rareté relative de la représentation du domaine d'ondelettes pour le signal. La notion derrière la compression est basée sur le concept que la composante régulière du signal peut être approchée avec précision en utilisant les éléments suivants : un petit nombre de coefficients d'approximation (à un niveau convenablement choisi) et certains des coefficients de détail

Dans cette première méthode, la fonction WDENCMP effectue un processus de compression à partir de la structure de décomposition en ondelettes [c , l] de l'image

Dans ce programme on donne le Niveau de décomposition et on prend l'Ondelette quasi symétrique et on fait la Décomposition en ondelettes 2D multi niveaux. et Dans cette première méthode, la fonction WDENCMP effectue un processus de compression à partir de la structure de décomposition en ondelettes [c , l] de l'image. On utilise la formule [xd,cxd,lxd,perf0,perfl2] = wdencmp(opt,c,l,w,n,thr,sorh,keepapp)qui ont les mêmes arguments de sortie, en utilisant les mêmes options que ci-dessus, mais autorisant des seuils dépendants du niveau contenus dans le vecteur THR (THR doit être de longueur N). De plus, l'approximation est conservée. Notez que, en ce qui concerne wden (dé bruitage automatique), wdencmp permet plus de flexibilité et on vous pouvez mettre en œuvre notre propre stratégie de dé bruitage.

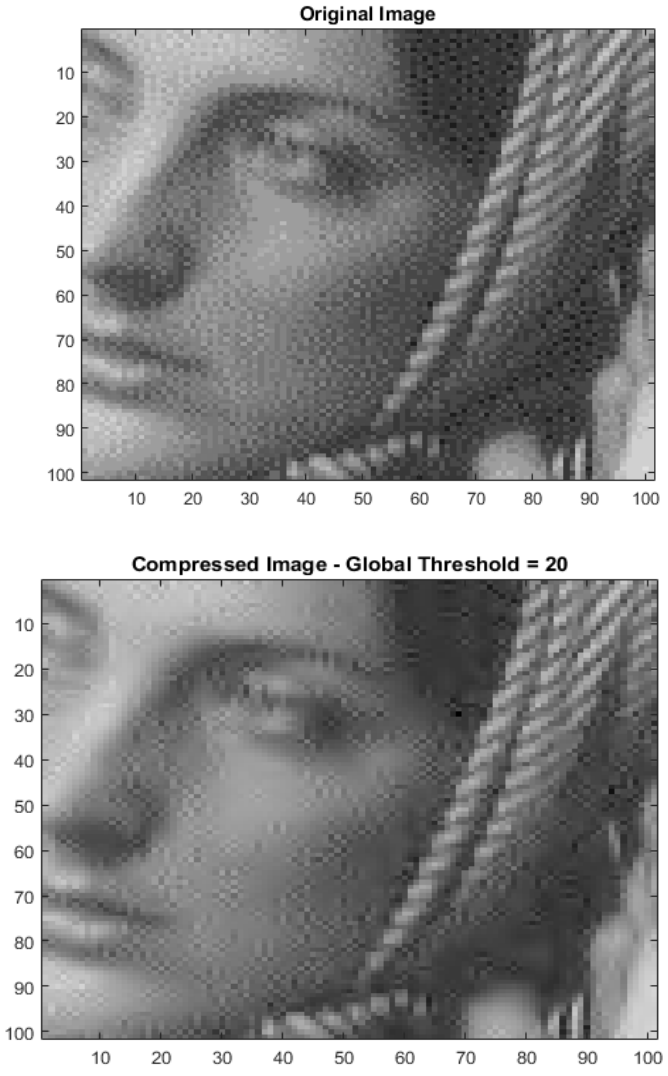


Figure 50 l'affichage d'image compressé avec un global seuil=20 par matlab

3.4.3 Méthode 2 : seuillage dépendant du niveau

La fonction WDENCMP permet également des seuils dépendants du niveau et de l'orientation. Dans ce cas, l'approximation est conservée. Les seuils dépendant du niveau dans les trois orientations horizontale, diagonale et verticale sont les suivants

Dans ce deuxième exemple, notez que la fonction WDENCMP effectue un processus de compression à partir de l'image x.

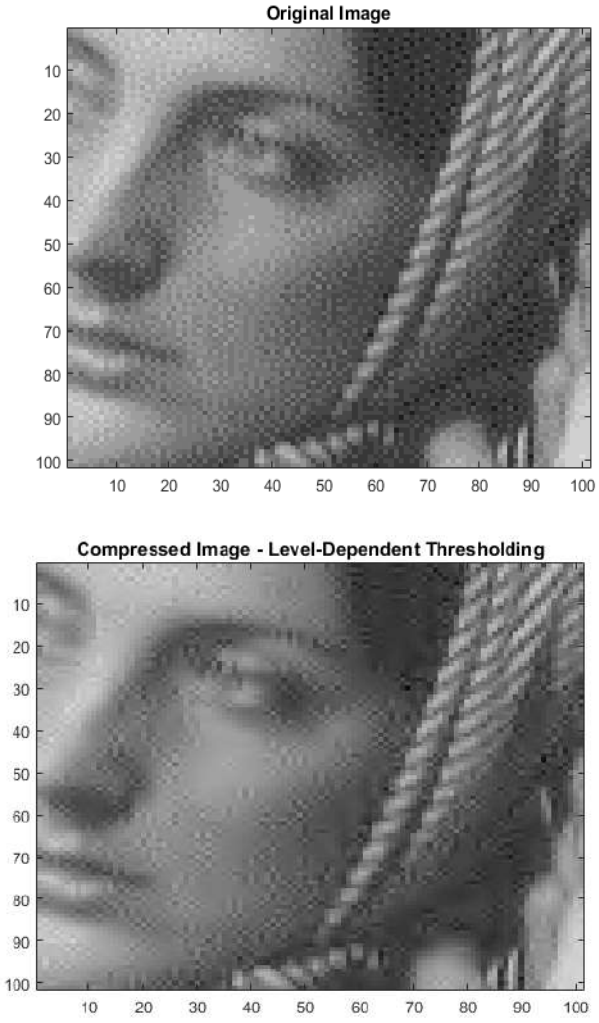


Figure 51 l'affichage d'image obtenu par la méthode de seuillage dépendant du niveau par matlab

on remarque que l'image est bien compressé car on a aucune perte visible de qualité. donc il ya grande ressemblance après la compression on déduit que l'application des ondelettes

pour compresser un image est effectué par succès pour les deux méthode on peut dire que la compression c'est l'un de applications des ondelettes en traitement de signal

3.5 Conclusion

En utilisant un seuillage dépendant du niveau, la densité de la décomposition en ondelettes a été réduite de 3 % tout en améliorant la récupération de la norme L2 de 3 %. Si la représentation d'ondelettes est trop dense, des stratégies similaires peuvent être utilisées dans le cadre de paquets d'ondelettes pour obtenir une représentation plus clairsemée. Vous pouvez ensuite déterminer la meilleure décomposition par rapport à un critère de type entropie convenablement sélectionné, qui correspond à l'objectif choisi (dé bruitage ou compression)

5. Conclusion générale

Les ondelettes c'est une découverte très important dans le traitement de signal et dans les communications et son champ d'application très vaste dans ce mémoire on confirmé que cette méthode est efficace pour l'élimination de bruit ou de compression dans les signaux et les images ,

Dans l'analyse d'un signal Lorsque la transformé de Fourier est ne peut pas fait une localisation sur les signaux qui comprend un implusion ou saut , il doit passe vers la nouvelle transformation d'ondelette qui caractérise par un fenêtre g telque on peut reconstructer le signal original et on signifie la technique multi résolution qui conduit à des approximations de plus grossières de signal initial pour cela on peut utiliser des banc des filtre pour ce but et on a beaucoup de base dans les ondelettes il faut choisi l meilleur pour d'optimiser la représentation d'un signal donné qui fait par des algorithmes on trouve ses application dans le dé bruit pour estimer le signal originale on deux estimateurs seuillage dur ou doux et il doit évaluer les performances de ces estimateurs on peut adopter une stratégie minimax, qui examiner quelle est l'erreur minimale atteignable pour le signal se révélant le plus défavorable Les principes des méthodes de dé bruitage que nous venons de présenter peuvent être appliqués à des décompositions en paquets d'ondelettes, qui conduisent généralement à une amélioration de la qualité des estimations réalisées. Pour le choix de la meilleure base ,il est

alors préférable d'utiliser un critère propre au dé bruitage les ondelettes restent un sujet actif de recherche s'enrichissant continuellement de nouvelles idées.

6 Bibliographie

[1] A. Grossmann. Wavelet transform and edge detection. Stochastic Processes in Physics and Engineering.

[2]Yves Meyer, Stéphane Jaffard et Olivier Rioul, « L'analyse par ondelettes », *Pour la Science*, n° 119, septembre 1987 (lire en ligne [archive], consulté le 30 octobre 2017).

[3] Jian-Jiun Ding, Time-Frequency Analysis and Wavelet Transform [archive], 2008

[4]« *relations d'indétermination de Heisenberg* » [archive], *Le Grand Dictionnaire terminologique*, Office québécois de la langue française

[5] Valérie Perrier, Application de la théorie des ondelettes [archive] ; Dennis Gabor, « Theory of communication : Part 1: The analysis of information », *Journal of the Institute of Electrical Engineering*, London, vol. 93-3, n° 26, 1946, p. 429-457 (lire en ligne [archive], consulté le 9 septembre 2013)

[6] J. Arsac et J.-C. Simon. Repr´esentation d'un ph´enom`ene physique par des sommes de translat´ees. Annales de Radiolectricit, XV:216–229, juillet 1960.

[7] Richard Taillet, Loïc Villain et Pascal Febvre, *Dictionnaire de physique*, Louvain-la-Neuve, De Boeck Supérieur, hors coll., janvier 2018, 4e éd. (1re éd. mai 2008), X-956 p., 24 cm (ISBN 978-2-8073-0744-
5, EAN 9782807307445, OCLC 1022951339, SUDOC 224228161, présentation en ligne [archive], lire en ligne [archive]), *s.v.*relations d'indétermination d'Heisenberg, p. 639, col. 1.

[8] Time Frequency Analysis [archive] sur le site de l'entreprise WaveMetrics

[9] P. Flandrin, M. Basseville, N. Martin. M´ethodes temps-fr´equence. Traitement du signal-suppl´ement, 9(1):77–149, 1992

[10] P. Flandrin, M. Basseville, N. Martin. M´ethodes temps-fr´equence. Traitement du signal-suppl´ement, 9(1):77–149, 1992.

[11]Strang G. [1993]. Wavelet transforms versus Fourier transforms. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 28 :288-305.

[12] J. M. Chassery, J. Waku Kouomou. Sp´ecification d'une ondelettes pour l'analyse multir´esolution d'un contour discret. Traitement du signal, 10(3) 231–240, 1993. [6] S . MALLAT, « Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L2 (R) », Trans . of the American Mathematical Society, vol . 315, pp . 69-87, Sept . 1998

[13] LU HUA XU (W.-S.), ANTONIOU (A.) - An improved method for the design of FIR quadrature mirror-image filter banks. - IEEE Trans. Signal Processing, 46 (5), p. 1275-1281, mai 1998.

[14] M. Kunt et col. Techniques modernes de traitement numerique des signaux. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1995.

. [15] W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Technical Report 1994:7, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1994

[16] Stéphane Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Éditions de l'École polytechnique, 2000

[17] H. J. Nussbaumer and M. Vetterli. Computationally efficient QMF filter banks. ICASSP, pages 11.3.1–11.3.4, San Diego, CA, 1984. IEEE

[18] T. Dallard and G.R. Speeding. 2-d wavelet transform: generalisation of the hardy space and application to experimental studies. European Journal of Mechanics,B/Fluids, 12(1):107–134, 1993.

[19] S. Dahlke and alt. Multiresolution analysis and wavelet on s 2 and s 3 . Technical Report 104, RWTH Aachen, 1994

[20]Yves Meyer, Stéphane Jaffard et Olivier Rioul, « L'analyse par ondelettes », *Pour la Science*, n° 119, septembre 1987 (lire en ligne [archive], consulté le 30 octobre 2017).

[21] H.S. Malvar. Lapped transforms for efficient transform/subband coding. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, pages 969–978, June 1990.

[22] M. Barrat and O. Lepetit. Recursive wavelet transform for 2d signals. CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 56(1):106–108, 1994. [11]Pierre Bézier, « Courbes et surfaces pour la CFAO », *Techniques de l'ingénieur Applications des mathématiques*, vol. TIB102DUO, n° a1440, 1992 (lire en ligne [archive], consulté le 25 décembre 2017).

[23] P.G.Lemarié, "Fonction à support compact dans les analyses multi-resolutions", Revista Matematica Iberoamericana

[24] Y. Meyer. Ondelettes et applications. Journee Annuelle de la Societe Mathematique de France, 5 mai 1990.

. [25] S. Mallat. Multiresolution approximation and wavelets. Trans. of American Math. Soc., (315):69–88, 1989

[26] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelets. Technical report, GRASP Lab, Dept. of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, 1987

[27] A. Juditski. Wavelet estimators: Adapting to unknown smoothness. Technical Report 815, IRISA-Rennes, 1994.

[28] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Comm. Pure and Appl. Math., XLI(41):909–996, nov 1988.

[29] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Wavelets with Finite Support - Connection with Discrete Filters. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[30] T. Pun. Entropic thresholding, a new approach. Comput. Graphics Image Process, 47(3):210–239, 1989.

[31]Charles C. [2003]. Some wavelet applications to signal and image processing.PhD Thesis. FUNDP.

[32]Donoho D.L., Coifman R.R. [1995]. Translation-invariant denoising. Wavelets and Statistics, A. Antoniadis and G. Oppenheim, Springer-Verlag.

[33]Mallat S. [1988]. A wavelet tour of signal processing. Academic Press.

[34] M. Antonini et al. Image coding using wavelet transform. IEEE Trans. on Image Processing 1,2, pp 205-220, 1992.

[35] J. Delahaye. La ressemblence mathematis´ee. Pour la science, (235), 1997. [26] D. L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. IEEE Trans. on Inf. Theory, 1994.

[36] O. Rioul. On the choice of wavelets filters for still image compression. volume V, pages 550–553, Minneapolis, MN, April 1993. IEEE.

[37] Bonjour J.D. [1999]. Introduction à Matlab et GNU Octave. Support du cours "Informatique de l'ingénieur" pour les étudiants en Sciences et ingénierie de l'environnement de l'ENAC, EPFL à Lausanne. (disponible sur http ://enacit1.epfl.ch/cours matlab/ consulté le 21/03/2008)

[38] Charles C. [2003]. Some wavelet applications to signal and image processing. PhD Thesis. FUNDP.

[39] Donoho D.L., Coifman R.R. [1995]. Translation-invariant denoising. Wavelets and Statistics, A. Antoniadis and G. Oppenheim, Springer-Verlag.

[40] Mallat S. [1988]. A wavelet tour of signal processing. Academic Press.

[41] Strang G. [1993]. Wavelet transforms versus Fourier transforms. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 28 :288-305.

Wavelab http ://www-stat.stanford.edu/_wavelab/ (consulté le 2 avril 2010).

22

[42] L. M. Reissel. Wavelets and their applications in Computers Graphics. cours SIGGRAPH, 1994.

[43] O. Rioul. On the choice of wavelets filters for still image compression. volume V, pages 550–553, Minneapolis, MN, April 1993. IEEE.

[44] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill., 3 edition, 1987.

[45] W. Rudin. Analyse fonctionnelle. EDISCIENCE international, 1995.

[46] E. P. Simoncelli E. H. Adelson. Subband image coding with three-tap pyramids. MIT Media Lab, Picture Coding Symposium, Cambridge MA, pages 1–2, 1990.

[47] Schuler S. Laine A. and Girish V. Orthonormal wavelet representations for recognizing complex annotations. Machine Vision and Applications, 6, 1993.

[48] S. E. Sclaroff. Modal Matching: A Method for Describing, Comparing, and Manipulating Digital Signals. PhD thesis, MIT, 1995.

[49] M. J. Smith and T. P. Barnwell. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. IEEE Trans. on Acoust. Signal Speech Process., 34:434–441, 1986.

[50] J.-O. Stromberg. A modified Franklin system as the first orthonormal system of wavelets. Research Notes in Applied Mathematics-Springer Verlag, 1992.