République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Fares de Medea

Faculté des Sciences

Département des Mathématiques et de l'informatique



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Spécialité : Recherche Opérationnelle

par

Abdelkader FERARSA Et Yasser BOUTELDJA

Croissance des fonctions entières

Soutenu le 17 06 2023 devant le jury composé de

Promoteur :	Mr.Houcine Ayadi	Université de Médéa
Examinateur :	Mr.Khaled Bouadjila	Université de Médéa
Encadreur :	Mr.Haoues BAGUA	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2022 – 2023

TABLE DES MATIÈRES

Remerciment 4

Dédicase 5

Résumé 6

Abstract 7

Notation 8

Introduction 9

1 Résultats préliminaires et matériels 11

1.1 Fonctions holomorphes 11

1.1.1 Points singuliers isolés. 14

1.2 Fonctions entières 17

1.2.1 Définitions de base 17

2 Croissance des fonctions entières 20

2.1 L'ordre et le type d'une fonction entière 21
2.1.1 L'ordre d'une fonction entière 21
2.1.2 Le type d'une fonction entière. 23
2.1.3 Détermination l'ordre et le type à partir des coefficients d'expansion de la série de puissances. 25
2.2 Les zéros d'une fonction entière 26
2.2.1 Fonctions entière avec un nombre fini des zéros. 26
2.2.2 Produits infinis 27
2.3 Le théorème de factorisation de Weierstrass 28
2.4 La formule de Jensen 30
2.4.1 L'exposant de convergence 32
2.5 La relation entre la croissance d'une fonction entière et ses zéros 32

Conclusion **35**

Bibliography **36**

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, nous remercions **ALLAH** le tout puissant de nous avoir donné la force, courage, patience et la volonté pour accomplir ce travail.

« Nous tenons à remercier chaleureusement notre encadreur de mémoire, **Mr.Haoues BAGUA**, pour son soutien et sa guidage tout au long de ce projet de recherche sur **La croissance des fonctions entières**.

Nous tenons à remercier nos jurés **Mr.Houcine Ayadi** et **Mr.Khaled Bouadjila**

Nous tenons également à remercier nos professeurs, pour leur temps et leur expertise précieuse dans le domaine de **Recherche opérationnelle**. Enfin, nous souhaite remercier NOTRE familles et notre amis pour leur soutien constant et leur encouragement pendant que nous travaillons sur ce mémoire de **Master**. »

DÉDICACE

Nous dédions ce modeste travail a :

Ceux qui nous ont guidés dans la bonne voie, nous rappelant que la volonté crée des grands hommes, tout comme nos parents qui ont attendu patiemment les fruits de leur éducation, étant pour nous le symbole du dévouement et du courage.

À nos chers proches dans nos vies et à toutes nos familles de **Bouteldja** et **Ferarsa**, ainsi qu'à tout mes amis (Je n'ai pas oublié **Taki**, **Oussama Talbi** et **Mouhammed Dahmani** dans la dédicace).

Et à toutesles personnes qui ont assisté à cet événement.

Merci à tous.

RÉSUMÉ

Tout polynôme peut s'écrire comme un produit de facteurs linéaires. L'analogie de ceci dans les fonctions entières est le théorème de factorisation de Weierstrass sur la représentation des fonctions entières par des produits infinis.
Ce théorème est à la base de l'étude de la relation entre la croissance d'une fonction entière et la distributions de ses zéros dans le plan complexe.
Mots clés : Fonction entière, ordre, type, factorisation de Weierstrass

ABSTRACT

Any polynomial can be written as a product of leniar factors. The analogy of this in entire function is Weierstrass factorization theorem on the representation of entire functions by infinite products. This theorem is the basis for studying the relationship between the growth of entire function and the distribution of its zeros in the complex plane.

Key words : entire function, order, type, Weierstrass factorization.

NOTATIONS

1. $\mathbb{C}$: Le corps des nombres complexes.
2. $\Re f$: La partie réelle de la fonction f.
3. Imf : La partie imaginaire de la fonction f.
4. $M_f(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$: Le module maximum de $f(z)$ sur le cercle de rayon r.
5. $\rho(f)$: L'ordre de la fonction f.
6. $\sigma(f)$: Le type de la fonction f.
7. $n(r)$: La fonction de comptage (le nombre de zéros de $f(z)$ sur le disque $|z| < r$).
8. τ : L'exposant de convergence.

INTRODUCTION

Une fonction entière est une fonction à valeurs complexes qui définie sur tout le plan complexe, de sorte qu'elle a une dérivée complexe en chaque point (holomorphe) c'est-à-dire, pour chaque nombre complexe z_0 la limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe.

Des exemples courants des fonctions entières incluent les polynômes, e^z, $\sin z$, $\cos z$, et leurs compositions, sommes et produits .

D'après le théorème fondamental de l'algèbre chaque polynôme $P(z)$ de degré n a coefficients complexes peut être écrit sous la forme

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$$

ou $z_1, z_2, .., z_n$ sont les racines de $P(z)$ et a est une constante non nulle.

Le théorème de factorisation de Weierstrass vous indique comment étendre ce résultat à des fonctions entières, qui peuvent avoir une infinité de racines .

En utilisant des polynômes pour la motivation, on pourrait penser que toute fonction entière $f(z)$ peut être écrite sous la forme :

$$f(z) = a \prod_{k=0}^{\infty} (z - z_k)$$

ou les z_k sont les racines de $f(z)$, (il peut y en avoir une infinité, en général) et a une constante non nulle. Cependant, c'est certainement faux, car e^z n'a pas de zéros dans le plan complexe, et il n'est certainement pas constante. En fait, pour toute fonction entière non constant $g(z)$, $e^{g(z)}$ n'aura pas de zéros dans le plan complexe et ne sera pas constante.
Donc, au minimum, nous devrions changer notre décomposition proposée en

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_k (z - z_k)$$

Cependant, c'est toujours faux.
Le problème est que si le produit est infini, il ne convergera pas. Nous devons donc trouver des belles fonctions standard qui ont les zéros souhaités, mais lorsque nous en multiplions un nombre infini, nous obtenons toujours quelque chose qui converge vers un nombre complexe. Nous appelons ces fonctions les facteurs élémentaires, et nous les définissons comme suit :

$$E_n(z) = \begin{cases} 1 - z & si \quad n = 0 \\ (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n}} & si \quad n > 0 \end{cases}$$

Le théorème de factorisation de Weierstrass vous dit que pour toute fonction entière $f(z)$ avec :

1. une racine de multiplicité m à $z = 0$ (nous autorisons $m = 0$, s'il n'y a pas de racine).
2. racines non nulles $z_1, z_2, z_3, \ldots$

Il existe une fonction entière $g(z)$ et des entières positifs k_i tels que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_i E_{k_i}\left(\frac{z}{z_i}\right)$$

Ce mémoire se compose de deux chapitres :
Dans le premier chapitre nous introduisons le matériel de base nécessaire pour les fonctions holomorphes et en particulier les fonctions entières.
Le deuxième chapitre est consacré à la croissance des fonctions entières, après avoir introduit l'ordre et le type d'une fonction entière, et ses zéros, en donne la formule de Jensen et la relation entre la croissance d'une fonction entière et ses zéros.

CHAPITRE 1

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ET MATÉRIELS

1.1 Fonctions holomorphes

Définition 1.1.1 ***(Limites)*** *Soit f est une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 exclu, la définition habituelle donne*

$$\lim_{z \to z_o} f = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, t.q \quad 0 < |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon.$$

Définition 1.1.2 ***(Continuité)*** *On a*

$$f \text{ continue au point } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Définition 1.1.3 ***(Dérivation)*** *Soit f définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant z_0, on a*

$$f \text{ dérivable au point } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Définition 1.1.4 ***(Fonction holomorphe)***

$$f \text{ holomorphe dans } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{C} \Leftrightarrow f \text{ dérivable en tout point de } \Omega.$$

Théorème 1.1.1 ***(Équations de Cauchy-Riemann)*** *Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ telle que $P = \Re f$ et $Q = Imf$. Alors f est holomorphe sur Ω si et seulement si P et Q de classe C^1 dans Ω et*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Théorème 1.1.2 *Si f est holomorphe dans un ouvert Ω alors $P = Ref$ et $Q = Imf$ sont des fonctions harmoniques dans Ω (c'est-a-dire sont de classe C^2 et vérifient l'équation de Laplace $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans Ω.)*

Théorème 1.1.3 ***(Théorème de Cauchy)*** *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω et Γ une courbe fermée simple orientée incluse dans Ω ainsi que son intérieur, alors $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Théorème 1.1.4 ***(Formule de Cauchy)*** *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D contenant une courbe simple fermée Γ dont l'intérieur Δ est inclus dans D alors, pour tout point a de Δ, on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Théorème 1.1.5 *Si f est holomorphe dans un domaine D contenant une courbe fermée simple Γ dont l'intérieur Δ est inclus dans D, ses dérivées successives en un point a de Δ sont données par*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Théorème 1.1.6 *(**Développement en série de Taylor**) Toute fonction holomorphe dans un domaine D est développable en série entière autour de tout point z_0 de D, le développement étant convergent dans le plus grand disque centré en z_0 et inclus dans D. Les coefficients a_n du développement sont donnés par la formule*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du$$

Théorème 1.1.7 *(**Inégalités de Cauchy**) Soit f une fonction holomorphe dans un domaine contenant l'origine, $M(r)$ le maximum de $|f|$ sur le cercle $|z| = r$ inclus dans D, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $r^n |a_n| \leqslant M(r)$, où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Théorème 1.1.8 *(**Principe du maximum**) Si f est holomorphe dans un domaine D et sur sa frontière et n'est pas constante, le maximum de son module dans le domaine et sur sa frontière est atteint en un point de la frontière.*

Définition 1.1.5 *(**Fonction entière**) Une fonction holomorphe dans tout le plan complexe est dite une fonction entière.*

Proposition 1.1.1 *L'ensemble des fonctions entières est identique à celui des séries entières dont le rayon de convergence est infini.*

Théorème 1.1.9 *(**Théorème de Cauchy-Hadamard**) Le rayon de convergence R d'une série entière à coefficients complexes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donné par :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Théorème 1.1.10 *(**Théorème fondamental de l'algèbre**) Tout polynôme P de degré supérieur ou égale à 1 à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Théorème 1.1.11 *(**Théorème de Liouville**) Si f est une fonction définie et holomorphe sur tout le plan complexe, alors f est constante dès lors qu'elle est bornée.*

1.1.1 Points singuliers isolés.

Étudions les points en lesquels est violée l'holomorphie des fonctions. Commençons par les plus élémentaires de ces points.

Définition 1.1.6 *On dit qu'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier isolé d'une fonction f s'il existe un voisinage pointé de z_0 (i.e. un ensemble $\{0 < |z - z_0| < r\}$ si z_0 est fini ou un ensemble $\{R < |z| < \infty\}$ si $z_0 = \infty$) dans lequel f est holomorphe.*

On distingue trois types de points singuliers selon le comportement de f lorsque z tend vers un tel point.

Définition 1.1.7 *On dit qu'un point singulier z_0 d'une fonction f est*

1. *artificiel ou éliminable si $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = A < +\infty$;*
2. *un pôle si $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$;*
3. *essentiel si f ne possède ni une limite finie, ni une limite infinie lorsque $z \longrightarrow z_0$.*

Exemple 1.1.1 *Le point $z = 0$ est un point singulier éliminable pour la fonction $\frac{\sin z}{z}$ ceci découle du fait que pour $z \neq 0$ on a le développement suivant :*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...,$$

d'où il s'ensuit que $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Exemple 1.1.2 *Les fonctions $f(z) = \frac{1}{z^n}$, où $n > 0$ est un entier, présentent un pôle au point $z = 0$.*

Exemple 1.1.3 *Le point $z = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, car lorsque, par exemple, $z = x$ tend vers 0 suivant l'axe réel, les limites à droite et à gauche sont distinctes (la limite à droite est égale à l'infini, la limite à gauche, à 0) ; la fonction $e^{\frac{1}{z}} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}$, n'admet pas de limite lorsque $z = iy$ tend vers 0 suivant l'axe imaginaire.*

Remarque 1.1.1 *Il peut de toute évidence exister des points singuliers non isolés. Par exemple, la fonction $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$ présente des pôles en $z = \frac{1}{n}(n = \pm 1, \pm 2, ...)$, donc $z = 0$ est un point singulier non isolé qui est un point d'accumulation des pôles.*

Exemple 1.1.4 *La fonction*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + ... \tag{1.1.1}$$

présente des points singuliers de nature plus compliquée. D'après la formule de Cauchy-Hadamard, la série (1.1.1) converge dans le disque $\{z : |z| < 1\}$ et par suite la fonction f est holomorphe dans ce disque. Elle tend vers l'infini lorsque z tend vers 1 suivant l'axe réel, donc le point $z = 1$ est un point singulier de f. Or

$$f(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + ... = f(z) - z^2,$$

donc $f(z) = z^2 + f(z^2)$ tend aussi vers l'infini lorsque z tend vers -1 suivant un rayon du disque. De façon analogue, $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$, donc $f \to +\infty$ lorsque $z \to \pm i$ suivant un rayon du disque. D'une façon générale,

$$f(z) = z^2 + ... + z^{2^n} + f(z^{2^n}),$$

pour tout n naturel, donc $f \to +\infty$ lorsque z tend suivant un rayon vers tout point « dyadique » $z = e^{k.\frac{2\pi i}{2^n}}, (k = 0, 1, ..., 2^n - 1)$ du cercle. L'ensemble des points « dyadiques » étant partout dense sur le cercle $\{z : |z| = 1\}$, tout point de ce dernier est un point singulier de f. Donc f possède toute une ligne composée de points singuliers non isolés (une ligne singulière.)

Théorème 1.1.12 ***(Laurent.)*** *Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine contenant la couronne $C_{z_0}(r, R)$ (centre z_o, rayons r et R, avec $0 < r < R$) et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R \tag{1.1.2}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \tag{1.1.3}$$

C_ρ désignant le cercle de centre z_0 et de rayon $\rho (r < \rho < R)$ parcouru dans le sens positif.

Définition 1.1.8 *La série (1.1.2) dont les coefficients sont définis par les formules (1.1.3) s'appelle série de Laurent de la fonction f dans la couronne $C_{z_0}(r, R)$. L'ensemble des puissances positives s'appelle partie régulière de cette série, celui des puissances négatives, partie principale .*

La nature d'un point singulier isolé $z = z_0$ est étroitement liée à celle de la série de Laurent de la fonction dans un voisinage pointé de z_0 (nous dirons plus brièvement série de Laurent au voisinage de a). Pour les points finis z_0 ce lien est exprimé par les trois théorèmes suivants.

Théorème 1.1.13 *Un point singulier isolé $z_0 \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est éliminable si et seulement si la série de Laurent de f au voisinage de z_0 ne contient pas la partie principale :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.1.4}$$

Remarque 1.1.2 *En prolongeant f par continuité au point z_0, i.e. en posant $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$, on obtient une fonction holomorphe en z_0 (c'est-à-dire $z \to z_0$ on élimine la singularité en z_0). Ceci justifie le terme de « point éliminable ». Nous conviendrons dans la suite que ces points sont réguliers et non pas singuliers pour la fonction étudiée.*

Théorème 1.1.14 *Un point singulier isolé $a \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est un pôle si et seulement si la partie principale de la série de f dans un voisinage pointé de z_0 ne contient qu'un nombre*

fini de termes non nuls :

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad m > 0. \tag{1.1.5}$$

Théorème 1.1.15 *Un point singulier isolé z_0 d'une fonction f est essentiel si et seulement si la partie principale de la série de Laurent de f dans un voisinage pointé de z_0 contient une infinité de termes non nuls.*

Remarque 1.1.3 *Ce théorème est en fait déjà contenu dans les théorèmes 1.1.13 et 1.1.14 (si la partie principale contient une infinité de termes, le point z_0 ne peut être ni éliminable, ni un pôle, si z_0 est un point singulier essentiel, la partie principale ne peut ni pas exister, ni contenir un nombre fini de termes).*

1.2 Fonctions entières

1.2.1 Définitions de base

Dans ce qui suit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ désigne une fonction entière transcendante c'est-à-dire ayant un nombre infini de coefficients a_k non nuls.

Définition 1.2.1 ***(Le module maximal)*** *Soit f une fonction entière. et soit $r > 0$. On définit le module maximal sur le cercle $|z| = r$, par*

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}. \tag{1.2.1}$$

Remarque 1.2.1 *D'après le principe du maximum, nous avons*

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| \leqslant r\}.$$

De plus $M(r, f)$ est une fonction strictement croissante si f est non constante.

Exemple 1.2.1

$$M(r, \cos z) = \max_{|z| \leqslant r} |\cos z|$$

Puisque

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + ..., \quad |z| < \infty,$$

alors

$$|\cos z| \leqslant 1 + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^4}{4!} + ...$$

Donc

$$|\cos z| \leqslant 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + ... = \cosh r.$$

Par suite

$$|\cos z| \leqslant \frac{e^r + e^{-r}}{2}, \quad |z| \leqslant r.$$

En remarquant que

$$\cos ir = \frac{e^r + e^{-r}}{2}$$

On déduit que

$$M(r, \cos z) = \frac{e^r + e^{-r}}{2}.$$

De même

$$M(r, \sin z) = \frac{e^r - e^{-r}}{2}, \qquad M(r, e^z) = e^r.$$

Définition 1.2.2 ***(Ordre)*** *L'ordre ρ d'une fonction entière $f(z)$ non identiquement nulle, est défini par*

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log \log M(r, e^z)} = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r},$$

Exemple 1.2.2 *Si $f(z) = \cos z$ on a*

$$M(r, \cos z) = \frac{e^r + e^{-r}}{2} = e^r \frac{1 + e^{-2r}}{2}$$

Comme

$$\frac{\log \log M(r, \cos z)}{\log r} = \frac{\log \left| r\left(1 + r^{-1}\left(\log \frac{1+e^{-2r}}{2}\right)\right)\right|}{\log r},$$

il vient que

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \left(1 + \frac{\log\left(1 + r^{-1}\left(\log \frac{1+e^{-2r}}{2}\right)\right)}{\log r}\right) = 1,$$

CHAPITRE 2

CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES

Une fonction entière est une fonction d'une variable complexe. Il a une représentation de la série de Taylor qui a une rayon infini de convergence
Il existe trois façon différentes d'une fonction entière $f(z)$ peut se comporter à l'infini.

1. $f(z)$ peut avoir un point d'holomorphie à l'infini, dans ce cas $f(z)$ est une constante (théorème de Liouville) $f = C$
2. $f(z)$ peut avoir un pôle d'ordre supérieure ou égale à un à l'infini, puis $f(z)$ se réduit à un polynôme $f(z) = \sum_{k=1}^{K} a_k z^k$.
3. $f(z)$ peut avoir une singularité essentiel à l'infini puis $f(z)$ serait une fonction entière transcendante.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{2.0.1}$$

Désormais, nous serons concerné principalement avec le troisième type de fonction entière et l'étude de leur croissance à mesure que z suffisamment quand puisque les fonctions entière peuvent être exprimées en série de Taylor convergente, elles possédant des propriétés similaires

à celles des polynômes.

Le taux de croissance d'un polynôme $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$ lorsque $z \to \infty$ dépend de degré du polynôme et donc du nombre de racines du polynômes.

Comme nous le verrons plus loin, l'idée de la relation entre la croissance d'un polynôme et le nombre de zéros qu'elle possède à une généralisation dans l'étude de la croissance des fonctions entière transcendantes,

Il est nécessaire d'introduire un taux de croissance pour caractériser la croissance d'une fonction entière.

A cette fin, nous définissons la fonction de module maximum pour une fonction entière

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

2.1 L'ordre et le type d'une fonction entière

2.1.1 L'ordre d'une fonction entière

Une fonction entière $f(z)$ est d'ordre fini si il existe $\mu > 0$ tel que pour r suffisamment grande $(r > R)$,

$$M_f(r) < \exp(r^\mu) \tag{2.1.1}$$

Le plus grande limite inférieure de ces μ, pour lequel 2.1.1 est valable, est appelé l'ordre de la fonction entière fonction $f(z)$, et est désignée par ρ, i.e. $\rho = \inf \mu \geq 0$. Si 2.1.1 n'est pas satisfaite pour toute valeur finie de μ, nous dirons que $f(z)$ a un ordre infini $(\rho = \infty)$.

Théorème 2.1.1 *L'ordre d'une fonction entière est calculé par la formule suivante*

$$\rho = \overline{\lim} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \tag{2.1.2}$$

Preuve. Par définition d'ordre ρ, pour chaque $\varepsilon > 0$ on a l'inégalité

$$M_f(r) < \exp(r^{\rho+\varepsilon}) \tag{2.1.3}$$

$$\ln \ln M_f(r) < \ln \ln \exp(r^{\rho+\varepsilon})$$

$$\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} < \frac{\ln\ln \exp(r^{\rho+\varepsilon})}{\ln r}$$

Il existe $r_n \to \infty$ *lorsque* $n \to \infty$ *tel que :*

$$M_f(r_n) > \exp(r_n^{\rho-\varepsilon}) \tag{2.1.4}$$

$$\ln\ln M_f(r_n) > \ln\ln \exp(r_n^{\rho+\varepsilon})$$

$$\frac{\ln\ln M_f(r_n)}{\ln r_n} > \frac{\ln\ln \exp(r_n^{\rho+\varepsilon})}{\ln r_n}$$

$$\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} < \rho+\varepsilon, \qquad r > R_\varepsilon, \qquad \rho-\varepsilon < \frac{\ln\ln M_f(r_n)}{\ln(r_n)} \tag{2.1.5}$$

comme ε *est arbitraire nous arrivons donc à 2.1.2*

Remarque 2.1.1 *La formule 2.1.2 peut être utilisée pour la définition de l'ordre d'une fonction entière* $f(z)$.

Remarque 2.1.2 *D'après que 2.1.4 et 2.1.5*

$$|f(z)| < \exp(|z|^{\rho+\varepsilon}), \qquad r > R(z), \qquad |f(z_n)| > \exp(|z_n|^{\rho-\varepsilon}) \tag{2.1.6}$$

où $z_n \to \infty$ *(*z_n *dépend de* f *et* ε*), et* $\varepsilon > 0$ *est arbitraire.*

Exemple 2.1.1 *Soit* $f(z) = e^z$. *Clairement,* $|e^z| \leq e^z$.*De plus, pour* $z = r$, *nous avons l'égalité. Donc,* $Mf(r) = e^r$. *En utilisant (2.1.2), nous trouvons* $\rho = 1$. *De façon analogue, on peut vérifier que la fonction* $f(z) = \exp(z^m)$ *est d'ordre* $\rho = m$.

$$\ln\ln M_f(r) = \ln\ln e^r$$

$$\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = \frac{\ln\ln e^r}{\ln r}$$

$$\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = 1$$

Exemple 2.1.2 *Soit* $f(z) = e^{e^z}$. *alors* $M_f(r) = e^{e^r}$, *et par conséquent, cette fonction entière est d'ordre infini :* $\rho = \infty$.

$$\ln\ln M_f(r) = \ln\ln e^{e^r}$$

$$\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = \frac{\ln\ln e^{e^r}}{\ln r}$$
$$\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = \frac{r}{\ln r}$$

2.1.2 Le type d'une fonction entière.

Soit la fonction entière $f(z)$ d'ordre ρ $(0 < \rho < \infty)$. Nous dirons que $f(z)$ est de type fini (par rapport à l'ordre ρ) s'il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$M_f(r) < \exp(\alpha r^\rho), \qquad r > R \tag{2.1.7}$$

La plus grande limite inférieure des valeurs de α, pour lesquelles (2.1.7) est satisfaite, est appelée le type de la fonction entière $f(z)$ et est notée σ. Si (2.1.7) n'est pas satisfaite pour toute valeur finie de ρ nous dirons que $f(z)$ est de type infini par rapport à l'ordre ρ et nous écrirons $\sigma = \infty$.

Théorème 2.1.2 *Le type d'une fonction entière $f(z)$ d'ordre ρ est calculé par la formule suivante*

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} \tag{2.1.8}$$

Preuve. Nous avons

$$M_f(r) < \exp((\sigma+\varepsilon)r^\rho), \qquad r > R(\varepsilon), \qquad\qquad M_f(r) > \exp((\sigma-\varepsilon)r_n^\rho), \qquad r_n \uparrow \infty \tag{2.1.9}$$

De (2.1.9), nous dérivons (2.1.8).

Remarque 2.1.3 *La formule (2.1.8) peut être utilisée pour la définition du type d'une fonction entière $f(z)$.*

Remarque 2.1.4 *De l'inégalité (2.1.9) pour $\sigma < \infty$, il résulte que*

$$|f(z)| < \exp((\sigma+\varepsilon)|z|^\rho), \qquad |z| > R(\varepsilon), \qquad\qquad |f(z_n)| > \exp((\sigma-\varepsilon)|z_n|^\rho), \tag{2.1.10}$$

où z_n est une suite qui dépend de f et $\varepsilon > 0$.

Exemple 2.1.3 *Soit*

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{2.1.11}$$
$$\rho(f) = 1, \qquad \sigma(f) = 1$$

. On a :

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Alors :

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{(\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 x(1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y} \\ &= \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x} \end{aligned}$$

Donc :

$$|\sinh y| = \sqrt{\sinh^2 y} \leq |\sinh y| \leq \sqrt{\sinh^2 y + 1} = \cosh y$$

et on a

$$\sinh r \leq \max_{|z|=r} |\sin z| \leq \cosh r$$

$$\frac{e^r - 1}{2} < \frac{e^r - e^{-r}}{2} \leq M(r, f) = \max_{|z|=r} |\sin z| \leq \frac{e^r + e^{-r}}{2} < \frac{e^r + 1}{2}$$

Donc :

$$\rho(f) = 1, \qquad et \qquad \sigma(f) = 1$$

.

2.1.3 Détermination l'ordre et le type à partir des coefficients d'expansion de la série de puissances.

L'ordre et le type d'une fonction entière peuvent être déterminés à partir de les coefficients de la série 2.0.1. Plus précisément, le théorème suivant est valable.

Théorème 2.1.3 ***(Lindelof, Pringsheim)***

1. *L'ordre ρ de la fonction entière $f(z)$ est déterminé par la formule*

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln|\frac{1}{a_n}|} \tag{2.1.12}$$

2. *Le type de la fonction entière $f(z)$ a l'ordre ρ ($0<\rho<\infty$), alors son type σ est déterminé par la formule*

$$\sigma = \frac{1}{\rho e} \overline{\lim} n|a_n|^{\frac{\rho}{n}} \tag{2.1.13}$$

Remarque 2.1.5 *Les limites de (2.1.12) et (2.1.13) ne changeront pas, si les coefficients a_n sont remplaces par $(n+1)a_n$. Ainsi, après dérivation, l'ordre et le type d'une fonction entière ne changent pas.*
En utilisant le théorème (2.1.3), on peut facilement construire des fonctions entières d'ordre et de type arbitraires.

Exemple 2.1.4 *Considérons la fonction*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n = \left(\frac{C}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}, \qquad C \equiv const$$

ou $0 < \alpha < \infty$. Par (2.1.12), nous calculons

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = \alpha$$

Ainsi, la fonction $f(z)$ est entière d'ordre $\rho = \alpha$.

Exemple 2.1.5 *Considérons la fonction*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n = \left(\frac{e\alpha\beta}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}$$

ou $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta < \infty$. *D'après l'exemple précédent, nous avons* $\rho = \alpha$. *Par (2.1.13) nous calculons*

$$(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[n]{|a_n|} = (\beta e\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

Ainsi, la fonction $f(z)$ *est entière d'ordre* $\rho = \alpha$ *et de type* $\sigma = \beta$.

Exemple 2.1.6

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad |a_n| = \frac{1}{n^{\frac{n}{\alpha_n}}}, \qquad \alpha_n > 0$$

Alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n$$

Ainsi, si $\alpha := \overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < \infty$, *alors la fonction* $f(z)$ *est entière d'ordre* $\rho = \alpha$.*En particulier, pour* $\alpha = 0$ *(par exemple,* $\alpha_n = \frac{1}{n}$*) on obtient une fonction entière d'ordre zéro. Si* $\alpha = \infty$ *et* $\alpha_n = o(\ln n)$ *(par exemple,* $\alpha_n = \ln^{\delta} n, \delta \in (0,1)$*), alors la fonction* $f(z) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *est entière d'ordre infini.*

Exemple 2.1.7 *La fonction* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\alpha_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}$ *est entière d'ordre* ρ *est de type maximal*

Exemple 2.1.8 *La fonction* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\alpha_n = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{\frac{n}{\rho}}$ *est entière d'ordre* ρ *est de type minimal*

Exemple 2.1.9 *La fonction* $f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \sum_{n}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!}$, *est entière d'ordre* $\rho = \frac{1}{2}$ *est de type* $\sigma = 1$

2.2 Les zéros d'une fonction entière

2.2.1 Fonctions entière avec un nombre fini des zéros.

Une fonction entière $f(z) \not\equiv 0$ peut n'avoir aucun zéro, ou un nombre fini de zéros, ou un ensemble dénombrable de zéros.

— La fonction

$$f(z) = e^{g(z)} \tag{2.2.1}$$

où $g(z)$ est une fonction entière, et n'a pas de zéros.

— Si la fonction entière $f(z)$, a un nombre fini de zéros $z_1, z_2, ..., z_n$ (chacun étant compté avec multiplicité), alors la fonction $\Phi(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$, où $\varphi(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$, n'a pas de zéros, et par conséquent, il peut être représentée sous la forme (2.2.1).

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{n}(z - z_k). \tag{2.2.2}$$

Ainsi, des fonctions entières de la forme (2.2.2) (et elles seules) ont un nombre fini de zéros.

— La formule (2.2.2) peut être généralisée au cas où une fonction entière a un nombre infini de zéros. Cela a été fait par Weierstrass et Hadamard. Dans ce cas, le produit fini est remplacé par un produit infini, dans lequel il faut en général ajouter certains multiplicateurs pour faire le produit infini.

Dans la section suivante, nous fournissons des informations auxiliaires sur les produits infinis.

2.2.2 Produits infinis

Définition 2.2.1 *Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ est dite convergente, si pour un certain N il existe :*

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{n=N}^{k} g_n \neq (0, \infty).$$

Remarque 2.2.1 *Pour un produit infini converge, on a*

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} g_k}{\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n-1} g_k} = 1$$

Remarque 2.2.2 *parfois il convient d'écrire le facteur commun sous la forme $g_n = 1 + v_n$ les proposition suivantes établit un lien entre les produits infinis et les séries*

Proposition 2.2.1 *Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} g_n = 0$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=N}^{\infty} \ln g_n$ converge pour certain N.*

Proposition 2.2.2 *le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+v_n)$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ converge.*

2.3 Le théorème de factorisation de Weierstrass

Supposons que la fonction entière $f(z)$ a une infinité de zéros. Puisque dans chaque disque $|z| < R$, $f(z)$ a un nombre infini de zéros, nous pouvons les énumérer (en comptant la multiplicité) comme suit :

$\underbrace{0, 0, ..., 0}_{m}, z_1, z_2, .., z_n, .. \; 0 < |z'_n| \leq |z_{n+1}|, \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$

ou $z = 0$ est un zéros de multiplicité m (si $f(0) \neq 0$ on pose $m = 0$).

Alors convenons ci-dessous que la suite de zéros d'une fonction entière est toujours énumérée de cette manière.

Le théorème suivant permet de construire des fonctions entières avec des zéros arbitraires donnés.

Définition 2.3.1 — *Posons $E_0(z) = 1 - z$ et pour tout entier p non nul*

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

Ces fonctions, introduites par Weierstrass, sont quelquefois connues sous le nom de facteurs élémentaires. Leur unique zéro est en $z = 1$. Leur utilité tient au fait que ces facteurs sont voisins de 1 lorsque $|z| < 1$ et p suffisamment grand, bien que $E_p(1) = 0$.

Lemme 2.3.1 — *Pour $|z| \leq 1$ et $p = 0, 1, 2, ...,$ on a*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Preuve 2.3.1 — *Pour $p = 0$, le résultat est évident. Pour $p \geq 1$, un calcul direct montre que*

$$-E'_p(z) = z^p \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

De sorte que $-E'_p$ possède un zéros d'ordre p en $z = 0$, tandis que les coefficients du développement $-E'_p$ en série entière sont des nombres réels non négatifs. Puisque

$$1 - E_p(z) = -\int_{[0,z]} E'_p(w)dw,$$

$1 - E_p$ *admet un zéros d'ordre* $p+1$ *au point* $z = 0$, *et si*

$$\varphi(z) = \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}},$$

la série $\varphi = \sum a_n z^n$ *a des coefficients* $a_n \geq 0$. *Donc* $|\varphi(z)| \leq \varphi(1) = 1$ *lorsque* $|z| \leq 1$. *Ce qui termine le démonstration du lemme*

Théorème 2.3.1 *Soit* (z_n) *une suite de nombres complexes, ou* $z_n \neq 0$ *et* $|z_n|$ *tend vers l'infini lorsque* n *tend vers l'infini. Soit* (p_n) *une suite d'entiers non négatifs telle que pour tout nombre positif* r *on ait en posant* $r_n = |z_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r^n}\right)^{1+p_n} < \infty. \tag{2.3.1}$$

Le produit infini

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z^n}\right) \tag{2.3.2}$$

définit alors une fonction entière P *qui possède un zéro en chaque point* z_n *et ne possède aucun autre zéro dans le plan complexe.*

Remarque 2.3.1 *Plus précisément, si* α *intervient* m *fois dans la suite* (z_n), *la fonction* P *possède un zéro d'ordre* m *au point* α.
La condition (2.3.1) est toujours satisfaite lorsque par exemple l'on prend $p_n = n - 1$.

Remarque 2.3.2 *Pour certaines suites* (r_n), *la relation (2.3.1) est satisfaite en prenant pour* (p_n) *une suite constante. Il y a intérêt à choisir cette constante aussi petite que possible ; la fonction ainsi construite selon (2.3.2) est appelée produit canonique associé à* (z_n). *Par exemple, si* $\sum \frac{1}{r_n} < \infty$, *nous pouvons choisir* $p_n = 0$ *et le produit canonique s'écrit simplement*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z^n}\right).$$

Si $\sum \frac{1}{r_n} = \infty$, *mais* $\sum \frac{1}{r_n^2} < +\infty$, *le produit canonique devient*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z^n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}.$$

Les produits canoniques jouent un rôle très intéressant dans l'étude des fonctions entières d'ordre fini.
Nous pouvons énoncer maintenant le théorème de factorisation de Weierstrass.

Théorème 2.3.2 *Soit f une fonction entière pour laquelle $f(0) \neq 0$, et soit $z_1, z_2, ...,$ la suite des zéros de f, chacun compté avec son ordre de multiplicité. Il existe une fonction entière g et une suite d'entiers non négatifs (p_n) tel que*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z^n}\right). \tag{2.3.3}$$

Remarque 2.3.3 (a) *Lorsque f possède un zéro d'ordre k en $z = 0$, ce qui précède s'applique à la fonction $f(z)/z^k$.*

(b) *La factorisation (2.3.3) n'est pas unique : une unicité peut être établie pour des fonctions f dont les zéros satisfont la condition requise pour la convergence d'un produit canonique.*

Preuve 2.3.2 — *Soit P le produit utilisé au théorème (2.3.1), construit a partir des zéros de la fonction f. La fonction f/P nous possède que des singularités artificielles dans le plan complexe, donc est une fonction entière. Puisque f/P ne possède aucun zéros sur ce même plan, qui est simplement connexe, pour une certaine fonction entière g on a $f/P = e^g$.*

2.4 La formule de Jensen

La caractéristique la plus simple des zéros d'une fonction entière $f(z)$ est la fonction de comptage $n(r)$, qui est égale au nombre de zéros de $f(z)$ dans le disque $|z| < r$ (chaque zéro est compté avec sa multiplicité). A fin d'estimer $\ln M_f(r)$ en utilisant $n(r)$, nous avant besoin la formule de Jensen.

Théorème 2.4.1 *Soit la fonction $f(z)$ holomorphe dans le disque $|z| < R$, $f(0) \neq 0$ et soit*

$\{z_n\}$ la suite ordonnée des zéros de $f(z)$. Alors pour $0 < r < R$ la formule suivante est valable

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|d\varphi = \ln|f(0)| + \sum_{|z_n|<r} \ln\frac{r}{|z_n|} \tag{2.4.1}$$

(s'appelle la formule de Jensen).

-On peut réécrire (2.4.1) sous une autre forme.

Pour cela on calcule l'intégrale

$$J = \int_0^r \frac{n(t)}{t}dt$$

Puisque $n(r) = 0$ pour $r \leq |z_1|$, cette intégrale existe, est on obtient

$$J = \sum_{k=1}^{n(r)-1} \int_{|z_k|}^{|z_{k+1}|} \frac{n(t)}{t}dt + \int_{|z_n(r)|}^{r} \frac{n(t)}{t}dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n(r)-1} \int_{|z_k|}^{|z_{k+1}|} \frac{k}{t}dt + \int_{|z_n(r)|}^{r} \frac{n(t)}{t}dt$$

Par conséquent,

$$J = \sum_{k=1}^{n(r)-1} \ln\left(\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|}\right)^k + \ln\left(\frac{r}{|z_n(r)|}\right)^{n(r)}$$

$$= \ln\frac{|z_2|.|z_3|^2...|z_{n(r)}|^{n(r)-1}.r^{n(r)}}{|z_1|.|z_2|^2...|z_{n(r)-1}|^{n(r)-1}.|z_{n(r)}|^{n(r)}}$$

$$= \sum_{|z_n|\leq r} \ln\frac{r}{z_n}$$

Donc, la formule de Jensen peut être réécrite sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|d\varphi = \ln|f(0)| + \int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \tag{2.4.2}$$

Il résulte de (2.4.2) que

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \leq \ln M_f(r) - \ln|f(0)|,$$

Alors

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \leq \ln\frac{M_f(r)}{|f(0)|}$$

(l'inégalité de Jensen)

Cette inégalité relie le nombre de zéros de $f(z)$ dans le disque $|z| < r$ avec $M_f(r)$, c'est-à-dire

avec le maximum du module de $f(z)$.

2.4.1 L'exposant de convergence

Considérons la suite de nombres complexes

$$a_1, a_2, ..., a_n, ..., \qquad 0 < |a_n| \leq |a_{n+1}|, \qquad \lim a_n = \infty \tag{2.4.3}$$

Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}} \tag{2.4.4}$$

Converge pour certain $\lambda > 0$, on dira que la suite (2.4.3) a un exposant de convergence fini. Si (2.4.4) ne converge pas pour tout $\lambda > 0$, convergence infini.

Définition 2.4.1 *La plus grand borne inférieur de ces λ pour laquelle (2.4.4) converge, est appelée l'exposant de convergence de la suite (2.4.3) et est notée τ, $\tau = \inf \lambda$.*

Théorème 2.4.2 *L'exposant de convergence τ de la suite (2.4.3) est calculée par la formule*

$$\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|a_n|}.$$

Exemple 2.4.1 *La suite (e^n) a pour exposant de convergence $\tau = 0$, puisque*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Exemple 2.4.2 *La suite $(n^{\frac{1}{\beta}})$, $\beta > 0$ a pour exposant de convergence $\tau = \beta$.*

Exemple 2.4.3 *La suite $(\ln n)$ a pour exposant de convergence $\tau = \infty$.*

2.5 La relation entre la croissance d'une fonction entière et ses zéros

Il s'avère qu'il existe une relation étroite entre la taux de croissance des zéros d'une fonction entière f et la croissance de son module maximum $M_f(r)$.

Théorème 2.5.1 *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ, et soit (z_n) la suite ordonnée de ses zéros.*

Alors nous avons :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}} \leq \rho(\rho+\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0 \tag{2.5.1}$$

Si en plus $0 < \rho < \infty$ et si $f(z)$ de type fini σ, alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|z_n|^{\rho}} \leq \sigma e \rho \tag{2.5.2}$$

Preuve 2.5.1 — *Estimons le membre de gauche de (2.4.2).*

Soit $\theta \in]0,1[$. Ensuite nous avons

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \geq \int_{\theta r}^r \frac{n(t)}{t}dt \geq n(\theta r)\int_{\theta r}^r \frac{dt}{t} = n(\theta r)\ln\frac{1}{\theta}.$$

Ainsi, en vertu de (2.4.2),

$$n(\theta r) \leq \frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}} \ln\frac{M_f(r)}{|f(0)|} \tag{2.5.3}$$

Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ.

Alors $\ln M_f(r) < r^{\rho+\varepsilon}$ pour $r > R_0(\varepsilon)$.

Il résulte de (2.5.3) que

$$\frac{n(\theta r)}{r^{\rho+\varepsilon}} < \frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}} - \frac{\ln|f(0)|}{r^{\rho+\varepsilon}\ln\frac{1}{\theta}}, \qquad r > R_0(\varepsilon).$$

Donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n(\theta r)}{r^{\rho+\varepsilon}} \leq \frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}}.$$

En remplaçant θr dans l'inégalité précédent par r on obtient,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r)}{r^{\rho+\varepsilon}} \leq \frac{1}{\theta^{\rho+\varepsilon}\ln\frac{1}{\theta}}.$$

Ou θ est un nombre arbitraire tel que $\theta \in]0,1[$.

Prenons $\theta = \exp(-\frac{1}{\rho+\varepsilon})$, pour ce θ le membre droit de l'inégalité atteint son maximum.

Ainsi,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r)}{r^{\rho+\varepsilon}} \leq e(\rho+\varepsilon) \tag{2.5.4}$$

— *De plus soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre ρ $(0 < \rho < \infty)$ et de type fini σ.*

Alors $\ln M_f(r) < (\sigma+\varepsilon)r^{\rho}$ pour $r > R_1(\varepsilon)$.

Il résulte de (2.5.3) que

$$\frac{n(\theta r)}{r^\rho} < \frac{(\sigma+\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\theta}} - \frac{\ln|f(0)|}{r^\rho \ln\frac{1}{\theta}}, \qquad r > R_1(\varepsilon).$$

Et par conséquent,

$$\overline{\lim}\, \frac{n(\theta r)}{r^\rho} \leq \frac{(\sigma+\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\theta}}.$$

En remplaçant à nouveau θr par r, on calcule

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{n(r)}{r^\rho} \leq \frac{(\sigma+\varepsilon)}{\theta^\rho \ln\frac{1}{\theta}}.$$

En prenant ici $\theta = e^{-\frac{1}{\rho}}$, et en utilisant le caractère arbitraire de $\varepsilon > 0$, on obtient finalement

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{n(r)}{r^\rho} \leq \sigma e \rho \tag{2.5.5}$$

Soit $f(z)$ avoir un ensemble infini de zéros.

Puisque $n(|z_n|+1) \geq n$, dans (2.5.4) et (2.5.5) nous pouvons remplacer $n(r)$ par n, et r par $|z_n|$.

Ainsi, le théorème est démontré.

En utilisant le théorème (2.5.1), nous pouvons démontrer l'assertion suivante, qui est due à Hadamard.

Théorème 2.5.2 *Soit $f(z)$ la fonction entière d'ordre fini ρ.*

Alors l'exposant de convergence τ de la suite de ses zéros est fini, et $\tau \leq 0$.

Preuve 2.5.2 *Il résulte de (2.5.4) que*

$$\frac{1}{|z_n|^\rho} < \left(\frac{e(\rho+z\varepsilon)}{n}\right)^{\frac{\lambda}{\rho+\varepsilon}}, \qquad n > N_1(\varepsilon).$$

Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^\rho}$ converge pour $\lambda > \rho + \varepsilon$.

Ceci donne l'assertion du le théorème (2.5.2)

CONCLUSION

L'un des problème les plus importants de la théorie des fonctions entière est celui de la relation entre la croissance d'une fonction entière et la distribution de ses zéros.
De nombreux autres problèmes dans des domaines proches de la théorie des fonctions complexes conduisent à ce problème.
Le lien entre la croissance d'une fonction entière et la distribution de ses zéros a été étudié dans les travaux classique de **Borel, Hadamard, Lindelof** et d'autre auteurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Boas. *Entire functions*. Academic press New york, 1954.

[2] B Levin. *Distribution of zeros of entire functions*. American Mathematical society Providence, 1964.

[3] A. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable vol 2*. Preutice Hall, 1965.

[4] A. Holland. *Introduction to the theory entire functions*. Academic Press, New york and London, 1973.

[5] Rudin Walter. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1987.

[6] Sanford L. Segal, *Nine introductions in complex analysis*

[7] Hille.E, *Analytic Function Theory*,Volume I(1959), II(1962),Ginn(Blaisdell),Boston,Mass.

[8] Murray R.Seymour L,*Complex Variables with an introduction to conformal maping and its applications*

[9] Rubel, L. A. , *Entire and Meromorphic Functions*, Series : Universitext VIII, Springer-Verlag, Berlin. 1996

[10] Langley.J.K,*Postgraduate notes on complex analysis*,https ://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/jkl/pg1.pdf

[11] Srishti Chatterji, *Cours d'analyse : Analyse complexe*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997

[12] Genet.J,Pupion.G,analyse Moderne 2,fonctions d'une variable complexe intégration calcul différentiel équations aux dérivées partielles