République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farés de Médéa
Faculté des Scienses
Département de Mathématiques et Informatique
Mémoire de Master
Spécialité :
Recherche Opérationnelle

Thème :
Etude des graphes de type Hypercube

Présenté par :
BENZERGA Selma et LAZAR Saida

Membre du Jurys :

Mr.	ZEMIR. M	M.A.A.	U. Y.F. de Médéa	**Président**
Mr.	BOUCHOU. A	M.C.A.	U. Y.F. de Médéa	**Examinateur**
Mr.	SAHRAOUI. A	M.A.A.	U. Y.F. de Médéa	**Encadreur**

Année universitaire
2023/2024

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions ***ALLAH*** *pour la santé, la volonté et la patience qui nous avoir données pour mener á terme mon master.*

Nous remercions du fond du coeur Mr. ***SAHRAOUI Abdelkader*** *pour nous avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses encouragement et ses qualités de conseils ont été précieux.*

Nous remercions également Mr. ***BOUCHOU Ahmed****, Maître de Conférences à l'université* ***Yahia Fares*** *de Médéa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.*

Nous remercions également Mr. ***ZEMIR Mohamed****, Maître Assistant à l'université* ***Yahia Fares*** *de Médéa pour avoir accepté d'être examinateur.*

"Et nous n'oublions pas d'adresser nos remerciements à tous les professeurs respectés du Département de Mathématiques et d'Informatique. Nous vous remercions beaucoup pour tous vos efforts

Il est important pour moi de remercier ma famille, celles qui ont toujours été une source d'encouragements pour moi.

Également, un remerciement a tous mes collègues de promo 2024 pour les bons moments que nous avons passé ensemble.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

⋆ *L'âme pure de mon père et ma chère mère qui m'à soutenu et encouragé pendant mes années d'études.*

⋆ *Tous ceux qui m'ont appris une lettre dans cette vie.*

⋆ *Mes sœurs, ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail.*

⋆ *Ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*

⋆ *Tous mes amis qui m'ont toujours encouragé.*

∗ ∗ ∗ *A tous ceux que j'aime* ∗ ∗ ∗

LAZAR Saida

Dédicace

Je dédie ce travail à :

⋆ *À ma très chère mère et mon très cher père pour leur soutien, leur présence, et leur amour qui m'ont encouragé dans mes études.*

⋆ *À mes chers frères,* ***Achraf****,* ***Abdelkader****,* ***Sofiane****,* ***Oussama****, et* ***Mohamed*** *, qui m'ont soutenu et encouragé pendant mes années d'études et ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail..*

⋆ *À ma famille, mes proches et ma cousine* ***Ikram*** *, qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*

⋆ *À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, ainsi qu'à toute la section RO (Recherche Opérationnelle).*

BENZERGA Selma

Résumé

L'hypercube, noté $Q_n = (V_{Q_n}, E_{Q_n})$, est défini par son ensemble de sommets $V_{Q_n} = \{0,1\}^n$ et deux sommets sont adjacets dans Q_n s'ils se difèrent en une seule compsante. Plus généralement, le graphe de Hamming, noté $H(d,q)$ avec d et q deux entiers naturels positifs, est le graphe d'ensemble de sommets $V_{H(d,q)} = S^d$ où $S = \{1,2,...,q\}$ est un ensemble de cardinalité q et deux sommets de $V_{H(d,q)}$ sont adjacents dans $H(d,q)$ s'ils se difèrent en une seule composante. Le $(0,2)$-graphe est le graphe connexe $G = (V,E)$ où deux sommets quelconques de V ont exactement 0 ou 2 voisins communs.

Une coloration propre d'un graphe $G = (V,E)$ d'ensemble des sommets V et d'ensemble d'arêtes E est une application C de V dans un ensemble de couleurs $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ telle que pour toute paire de sommets adjacents (v,w), $C(v) \neq C(w)$.

Notre travail dans ce mémoire se concentre sur le nombre chromatique des graphes de Hamming et des $(0,2)$-graphes appelés graphes de type hypercube.

Abstract

The hypercube, denoted $Q_n = (V_{Q_n}, E_{Q_n})$, is defined by its set of vertices $V_{Q_n} = \{0,1\}^n$ and two vertices are adjacent in Q_n if they differ in a single component. More generally, the Hamming graph, denoted $H(d,q)$ with d and q two positive natural integers, is the vertex set graph $V_{H(d,q)} = S^d$ oú$S = \{1,2,...,q\}$ is a set of cardinality q and two vertices of $V_{H(d,q)}$ are adjacent in $H(d,q)$ if they differ in a single component. The $(0,2)$-graph is the connected graph $G = (V,E)$ where any two vertices of V have exactly 0 or 2 common neighbors.

A proper coloring of a graph $G = (V,E)$ of vertex set V and edge set E is an application C of V in a set of colors $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ such that for any pair of adjacent vertices (v,w), $C(v) \neq C(w)$.

Our work in this thesis focuses on the chromatic number of Hamming graphs and $(0,2)$-graphs called hypercube-type graphs.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé **iv**

Abstract **v**

Introduction **1**

1 Notions générales sur les graphes **3**

1.1 Définition 3

1.2 Graphe simple 4

1.3 Voisinages et degré 4

1.3.1 Voisinages 4

1.3.2 Degré 5

1.4 Graphes partiels et sous-graphes 5

1.5 Sous-graphes particuliers d'un graphe 7

1.6 Chaîne et cycle 8

1.6.1 Chaîne 8

1.6.2 Cycle 9

1.7 Graphes particuliers 10

1.7.1 Graphe complet 10
1.7.2 Graphe complémentaire d'un graphe 10
1.7.3 Graphe biparti 10
1.7.4 Graphe biparti complet 11
1.8 Graphe connexe 11
1.9 Graphe régulier 12
1.10 Intervalles 12
1.11 Graphe convexe 13
1.12 Distance, excentricité et diamètre 13
1.13 Subdivision 14
1.14 $(0, \lambda)$-graphes 14
1.15 Isomorphisme 15
1.16 Opérations sur les graphes 15
1.16.1 Produit carré 16
1.16.2 Produit cartésien 17
1.17 Graphe hypercube 17
1.18 Propriétés de base des hypercubes 18
1.19 Graphe Hamming 19
1.20 Coloration des graphes 19

2 Graphe de type hypercube **21**

2.1 Les premières caractérisations de l'hypercube apparentées aux (0,2)-graphes 23
2.2 Propriétés des (0,2)-graphes 26
2.3 Caractérisations de l'hypercube comme (0,2)-graphe 27
2.4 D'autres caractérisations de l'hypercube ont été étendues aux graphes de Hamming. 28
2.5 Résultats sur la coloration 30

3 Coloration de certain graphes de type hypercube **33**

3.1 Graphe Hamming 33

3.2 (0, 2)-Graphe 44

Conclusion **47**

LISTES DES FIGURES

1.1 Graphe non orienté 4

1.2 Graphe simple 4

1.3 Graphes G 6

1.4 Graphes G et H 6

1.5 Graphe G 9

1.6 Graphe complet K_3 et K_5 10

1.7 Graphe biparti 11

1.8 Graphe $K_{2,3}$ 11

1.9 Graphe $K_{3.3}$ 11

1.10 Graphe connexe 12

1.11 Graphe non connexe 12

1.12 Graphe 3-régulier 12

1.13 $conv\{3,5\}=\{2,3,4,5,6\}$ 13

1.14 Graphe K_4 et la subdivision de K_4 14

1.15 $(0,2)$-Graphe H_{14} 15

1.16 $G \cong H$ 15

1.17 Produit cartésien $C_5 \times K_2$ 17

1.18 Les quatre premiers hypercube 18
1.19 Graphe Hamming $H(2,3)$. 19
1.20 la coloration de G 20

3.1 Graphe $H(3,2)$ 33
3.2 Graphe $H(2,3)$ 35
3.3 Graphe $H(3,3)$ 37
3.4 Graphe $H(2,4)$ 39
3.5 Graphe $H(3,4)$ 42

LISTES DES TABLEAUX

3.1 Les voisinages ouverts des sommets de $H(3,2)$ 34

3.2 Les voisinages ouverts des sommets de $H(2,3)$ 35

3.3 Les voisinages ouverts des sommets de $H(3,3)$ 36

3.4 Les voisinages ouverts des sommets de $H(2,4)$ 39

3.5 Les voisinages ouverts des sommets de $H(3,4)$ 42

INTRODUCTION

Introduction

La recherche opérationnelle est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'année, le champ d'application de la recherche opérationnelle s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la recherche opérationnelle a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

Confronté à un problème donné et pour en faciliter la compréhension, on recourt souvent au schéma. Ce dernier est composé exclusivement de points et de traits les reliant. Les points représentent les différents objets du problème. Quant aux traits, ils représentent les relations existant entre ces différents objets. Ce schéma est conventionnellement nommé graphe. Les points et les traits sont appelés respectivement sommets et arêtes. Si les traits sont orientés, on parlera d'arcs, au lieu d'arêtes. Ce type de problème appartient à un très vaste domaine s'appelle la théorie des graphes, qui s'est développée dans des divers disciplines telles que la chimie, la sociologie, l'économie,. . . .

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux du mathématicien suisse Euler au 18e siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des ponts de Königsberg, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un ile quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et revenir à son point de départ. Dés le début du 20e siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux traveaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

En 1852, Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte géographique avec quatre couleurs sous la contrainte que deux pays voisins sont colorés différemment. Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs K.Appel et W.Haken ont pu répondre affirmativement à la conjoncture des quatre couleurs. La recherches d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, avec V sont ensemble de sommets et E ensemble de arêtes . Une coloration propre des sommets est une application c de V dans N qui affecte une couleur (nombre entier positif) à chaque sommet, telle que deux sommets voisins n'ont pas la même couleur. Une classe de couleur i est un ensemble de sommets stable qui sont colorés avec la couleur i.

Le nombre minimum des couleurs utilisés dans la coloration c est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$.

Notre mémoire est réparties en trois chapitres

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition du graphe de type hypercube. Nous mentionnons également certaines limites et résultats présents sur les graphes de type hypercube, qui sont des numéros de couleur de graphe.

Le chapitre trois portera notre contribution sur la détermination du nombre chromatique des graphes de type hypercube graphe Hamming et $(0, 2)$-graphe.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHES

Nous introduisons dans ce chapitre les définitions et notations des concepts nécessaires.

1.1 Définition

Un graphe, noté $G = (V, E)$, est un couple d'ensemble où :

- V est un ensemble non vide appelé ensemble des sommets ;
- et E est un ensemble de parties de deux éléments de V appelé ensemble des arêtes.

L'ordre du graphe G, noté $n(G)$ ou n s'il n'y a pas de confusion, est son nombre de sommets (c'est-à-dire $|V| = n$).

La taille du graphe G, noté $m(G)$ ou m s'il n'y a pas de confusion, est son nombre d'arêtes (c'est-à-dire $|E| = m$).

- Deux sommets a et b sont adjacents dans $G = (V, E)$ si $\{a, b\} \in E$ et on note $e = ab$.
- Les deux sommets a et b sont appelés éxtremités de l'arête e.
- Si $a = b$, l'arête aa est appelée boucle.
- Un sommet est dit incident à une arête s'il se coinside avec l'une de ses deux éxtrémités.

- Les arêtes multiples sont celles qui ont les deux mêmes éxtrimités.

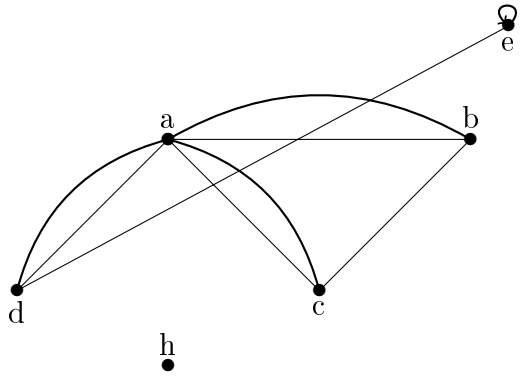


FIGURE 1.1 – Graphe non orienté

1.2 Graphe simple

Un graphe $G = (V, E)$ est dit graphe simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.

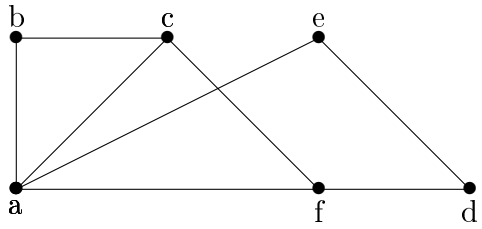


FIGURE 1.2 – Graphe simple

1.3 Voisinages et degré

Pour graphe simple $G = (V, E)$,

1.3.1 Voisinages

- Le voisinage ouvert d'un sommet $u \in V$, noté $N_G(u)$, est l'ensemble de tout les sommets adjacents au sommet v ;
- Le voisinage fermée d'un sommet $u \in V$, noté $N[u]$, est l'ensemble de sommets $N[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.

1.3.2 Degré

- Le degré d'un sommet u, noté $d_G(u)$, est le nombre des arêtes adjacentes à u, c'est-à-dire $d_G(v) = |N_V(G)|$.
- Le degré maximal d'un graphe, noté Δ, est le maximum des degrés de ses sommets. Donc

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} d_G(u)$$

- Le degré minimal d'un graphe, noté δ, est le minimum des degrés de ses sommets. Donc

$$\delta(G) = \min_{u \in G} d_G(u)$$

- Un sommet u est dit isolé si $d_G(u) = 0$;
- Un sommet u est dit pendant si $d_G(u) = 1$;
- Dans un graphe quelconque G, le nombre de sommet de degré impaire est pair ;
- Pour tout graphe $G = (V, E)$,

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = 2 \mid E \mid$$

1.4 Graphes partiels et sous-graphes

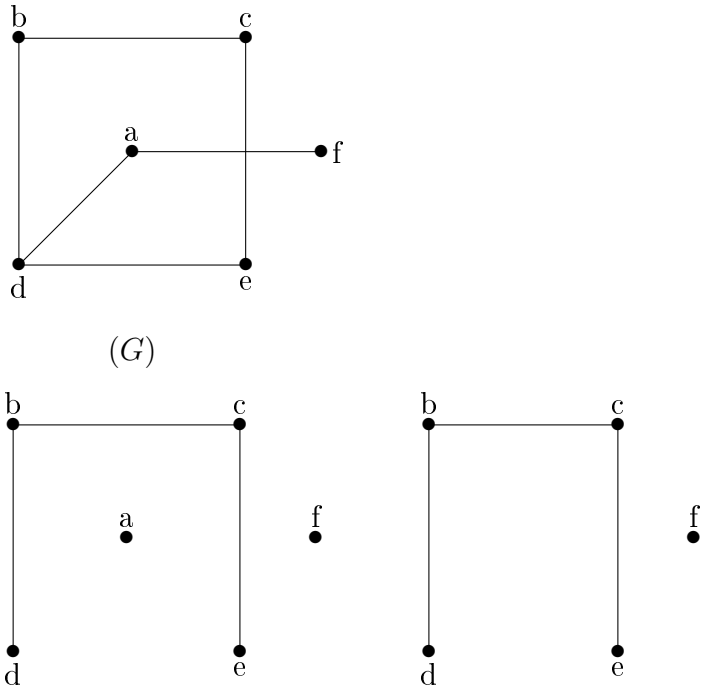
Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Graphe partiel d'un graphe

On appelle graphe partiel de G tout graphe $G' = (V, E')$ avec $E' \subseteq E$.

Sous-graphe d'un graphe

Un sous-graphe du graphe G est tout graphe $H = (V_H, E_H)$ tels que $V_H \subseteq V$, $E_H \subseteq E$ et les deux extrémités de chaque arête de E_H sont dans V_H.



Graphe partiel de (G) *Sous − graphe de* (G)

FIGURE 1.3 – Graphes G

Sous-graphe induit d'un graphe

Un sous-graphe $H = (V_H, E_H)$ est dit sous-graphe induit par V_H du graphe G, noté $\langle V_H \rangle$, s'il contient toutes les arêtes de E qui ont les deux extrémités dans V_H.

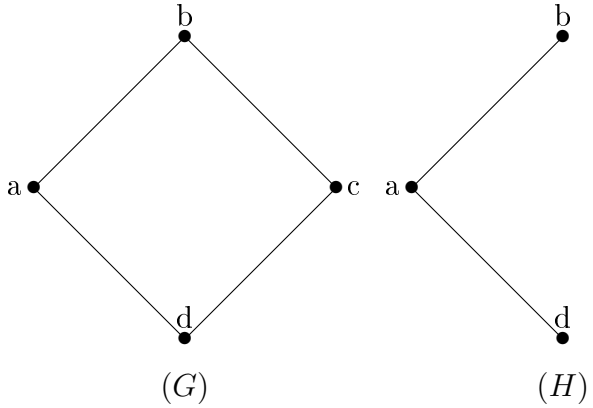


FIGURE 1.4 – Graphes G et H

1.5 Sous-graphes particuliers d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Clique

- On appelle clique tout sous-graphe induit $\langle V_H \rangle$ dont les sommets de V_H sont deux á deux adjacents entre eux.
- Une clique $\langle V_H \rangle$ est dite maximale si pour tout $u \in V - V_H$, alors $\langle V_H \cup \{u\} \rangle$ n'est pas une clique de G.
- La cardinalité d'une clique maximum du graphe G est appelée nombre de clique, notée $\omega(G)$.

Stable

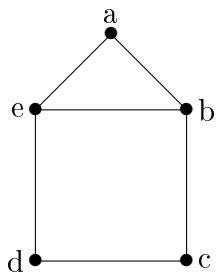
- On appelle stable tout sous-graphe induit $\langle V_H \rangle$ dont $E_H = \emptyset$.
- Un stable $\langle V_H \rangle$ est dit maximum si pour tout $u \in V - V_H$, alors $\langle V_H \cup \{u\} \rangle$ n'est pas un stable de G.
- La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité, notée $\alpha(G)$

Couplage

- On appelle couplage tout sous-graphe $A = (V_A, E_A)$ tel que $E_A \neq \emptyset$ et chaque sommet $v \in V_A$ est l'éxtrimité d'une seule arête $e \in E_A$;
- Un sommet v d'un graphe G est dit saturé par le couplage $A = (V_A, E_A)$ s'il est l'extrémité d'une arête de E_A ;
- Un couplage $A = (V_A, E_A)$ est dit maximum si le sous-graphe $\langle V_A \cup \{v\} \rangle$ n'est pas un couplage, on note par $\beta(G) = |E_A|$;

- Un graphe peut avoir plusieurs couplage maximum ;
- Un couplage est dit parfait s'il sature tout les sommets du graphe G.

Exemple :



(G)

- Clique :$\{a, b, e\}$.
- Stable :$\{a, b\}; \{a, c\}$.
- Couplage :$\{de, bc\}$.

1.6 Chaîne et cycle

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

1.6.1 Chaîne

- Une chaîne reliant les deux sommets u et v, notée (u, v)-Chaîne ou P_n, d'un graphe G est une séquence de sommets $w_1 w_2 ... w_n$ tel que $u = w_1, v = w_n$, $w_i w_{i+1} \in E$ pour tout $1 \leq i < n - 1$;
- Les deux sommets u et v sont appelés extrémités de la (u, v)-Chaîne ;
- Une chaîne est dite fermée si ces deux extrémités sont confondus ;
- La longueur d'une Chaîne est le nombre de ses arêtes ;

- Une chaîne est dite simple si toutes ses arêtes sont distinctes ;
- Une chaîne est dite élémentaire si tous ses sommets sont distincts ;
- Notons que toute Chaîne élémentaire est simple mais l'invers n'est pas toujours vrai ;
- Une chaîne est dite eulérienne si elle passe par toutes les arêtes du graphe G une et une seule fois ;
- Une Chaîne est dite hamiltonienne si elle passe par tous tous les sommets du graphe une et une seule fois.

1.6.2 Cycle

- On appelle cycle du graphe G toute chaîne fermée, noté C_n ;
- La longueur d'un cycle est également son nombre de sommets.

Exemple

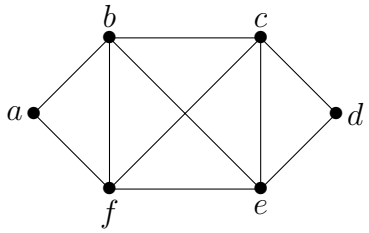


FIGURE 1.5 – Graphe G

- $\langle a, b, c, d, e, f \rangle$ est une chaîne de longueur 5 ;
- Chaîne simple $\langle a, b, c, d \rangle$;
- Chaîne élémentaire $\langle a, f, b, e, d \rangle$;
- Chaîne hamiltonienne $\langle a, b, c, d, e, f \rangle$;
- $C_5 = \langle a, b, c, e, f, a \rangle$ est un cycle de longueur 5 ;

- Cycle simple $\langle a, b, c, f, a \rangle$;
- Cycle élémentaire $\langle a, f, e, c, b, a \rangle$;
- Cycle eulérien $\langle a, b, c, d, e, f, c, e, b, f, a \rangle$;
- Cycle hamiltonien $\langle a, b, c, d, e, f, a \rangle$.

1.7 Graphes particuliers

1.7.1 Graphe complet

Un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n est dit complet, noté K_n, si le sous-graphe induit $\langle V \rangle$ est une clique. En particulier, K_3 est aussi appelé triangle.

1.7.2 Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire d'un graphe simple non orienté $G = (V, E)$ est le graphe noté par $\overline{G} = (V, \overline{E}$ tel que $\overline{E} = \{e = uv; u, v \in V etuv \notin E\}$.

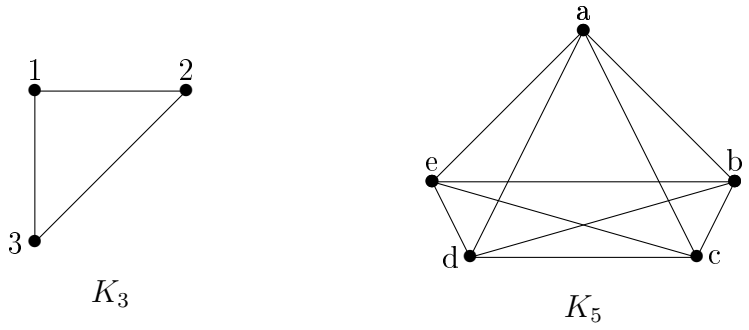


FIGURE 1.6 – Graphe complet K_3 et K_5

1.7.3 Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si son ensemble de sommets V peut-être partitionné en deux stables V_1 et V_2 tels que, on note $G = (V_1, V_2, E)$.

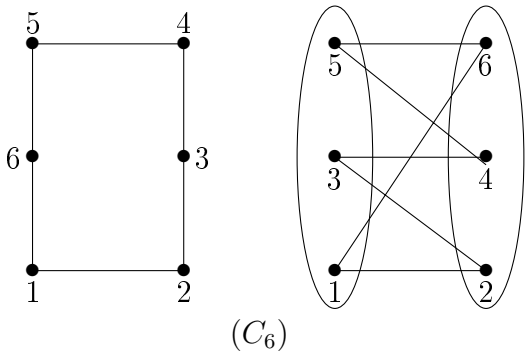


FIGURE 1.7 – Graphe biparti

1.7.4 Graphe biparti complet

Un graphe $G = (V_1, V_2, E)$ est biparti complet si chaque sommet de V_1 est adjacent a tous les sommets de V_2 on note par $K_{p,q}$ si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$

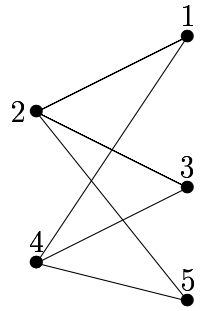


FIGURE 1.8 – Graphe $K_{2,3}$

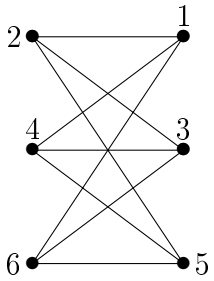


FIGURE 1.9 – Graphe $K_{3.3}$

1.8 Graphe connexe

- Un graphe$G$ est dit connexe si chaque deux sommets de G sont reliés par au moins une Chaîne ;
- Un graphe non connexe est décomposable en plusieurs sous-graphe maximal connexes appelés composantes connexes.

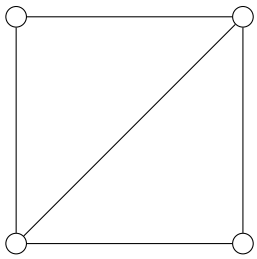


FIGURE 1.10 – Graphe connexe

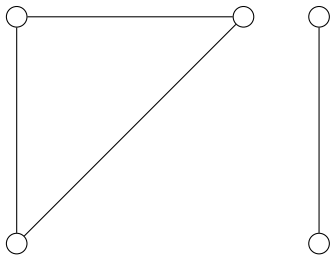


FIGURE 1.11 – Graphe non connexe

1.9 Graphe régulier

- Un graphe est régulier si tous ses sommets ont le même degré.
- Une graphe est dit k-régulier si ce même degré est k.
- Le graphe illustré par la figure 1.12 représente un graphe 3-régulier.

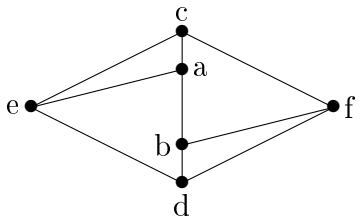


FIGURE 1.12 – Graphe 3-régulier

1.10 Intervalles

L'intervalle noté $I_G(u, v)$ ou $I(u, v)$ s'il n'y a pas confusion) est l'ensemble des sommets du graphe G appartenant aux chaînes reliant u et v tels que :

$$I(u, v) = w \in V; d(u, v) = d(u, w) + d(w, v)$$

On désignera par intervalle aussi bien l'ensemble $I(u, v)$ que le sous-graphe induit par $I(u, v)$.

Proposition 1. *[19]*

Soient u et v deux sommets d'un graphe G, alors :

- $u, v \in I(u, v)$;
- $I(u, v) = I(v, u)$;
- *si* $w \in I(u, v)$, *alors* $I(u, w) \subset I(u, v)$;
- *si* $w \in I(u, v)$, *alors* $I(u, w) \cap I(w, v) = w$;
- *si* $w \in I(u, v)$ *et* $z \in I(u, w)$ *alors* $w \in I(z, v)$.

1.11 Graphe convexe

soit $G = (V, E)$ un graphe ;l'ensemble $C \subseteq V$est dit convexe si $u, v \in C : I(v, u) \subseteq C$.

-Le plus petit convexe contenant un ensemble de sommets C est appelé enveloppe convexe de C et est noté $conv(G)$.

-Un hémiespace S de G est un convexe tel que V/S est aussi un convexe .

-Dans la figure l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{3, 5\}$ est l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

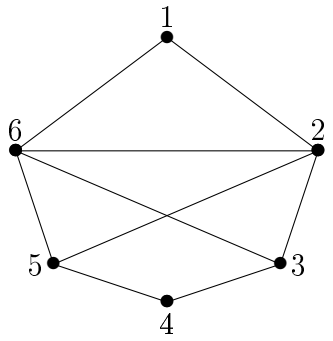


FIGURE 1.13 – conv$\{3, 5\}$=$\{2, 3, 4, 5, 6\}$

1.12 Distance, excentricité et diamètre

- La distance entre deux sommets u et v dans un graphe G, notée $d(u, v)$ où $d_G(u, v)$, est la longeur de la plus courte chaîne reliant u et v ;

- Excentricite d'un sommet u, notée $ex(u)$, est la distance maximal de u à tous les sommets du graphe G. Autrement dit,

$$ex(u) = \max_{v \in V} d_G(u, v)$$

- Le diamètre du graphe G, noté $diam(G)$, est l'excentricité maximale du graphe G. Autrement dit,

$$diam(G) = \max_{v \in V} ex(v)$$

1.13 Subdivision

- Soit $G = (V, E)$ un graphe et $e = uv$ une arête de G. subdiviser l'arête e consiste à ajouter un nouveau sommet z et remplacer l'arête e par deux nouvelles arêtes $e_1 = uz$ et $e_2 = vz$;

- Une subdivision de G, notée $\tilde{G}$, est obtenue en subdivisant toutes les arêtes de G.

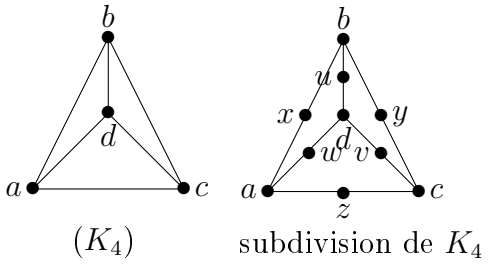


FIGURE 1.14 – Graphe K_4 et la subdivision de K_4

1.14 $(0, \lambda)$-graphes

Un graphe connexe G est dit $(0, \lambda)$-graphe si pour toute paire de sommets u et v,

$$|N_G(u) \cap N_G(v)| \in \{0, \lambda\}$$

.

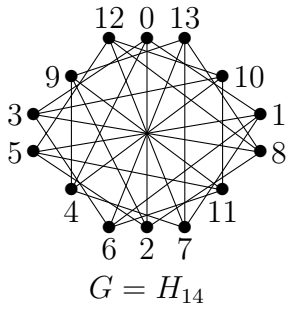


FIGURE 1.15 – $(0,2)$-Graphe H_{14}

1.15 Isomorphisme

Deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (S, A)$ sont dits isomorphes, noté $G \cong H$, si et selement s'il existe une application bijictive $f : E \to A$ qui vérifiant :

$$\forall u, v \in V;\ uv \in E \Leftrightarrow f(u)f(v) \in A$$

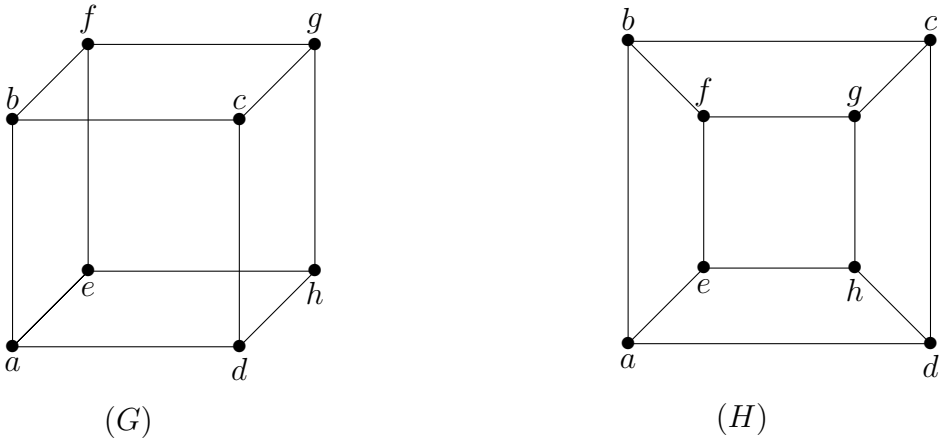


FIGURE 1.16 – $G \cong H$

1.16 Opérations sur les graphes

Le produit carré et le produit cartésien sont deux importantes opérations sur le graphes. Étant donnés deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$.

1.16.1 Produit carré

Le produit carré de G et G', noté $G\square G'$, est le graphe $G\square G' = (V_{G\square G'}, E_{G\square G'})$ dont l'ensemble de sommets est la produit cartésien $V_{G\square G'} = V \times V'$ et deux sommets (u, v) et (x, y) sont adjacents dans $G\square G'$ si et seulement si

$$\begin{cases} u = x \text{ et } vy \in E' \\ \text{où} \\ v = y \text{ et } ux \in E \end{cases}$$

Il est noter par définition que :

- Le nombre de sommets de $G\square G'$ est égal à $|V|.|V'|$;
- Le nombre d'arêtes de $G\square G'$ est égal à $|V|.|E'| + |V'|.|E|$;
- $d_{G\square G'} = D_G(u) + D_{G'}(u')$;
- $D(G\square G') = D(G) + D(G')$.

La figure 1.12 montre le produit cartésien $K_4\square K_2$.

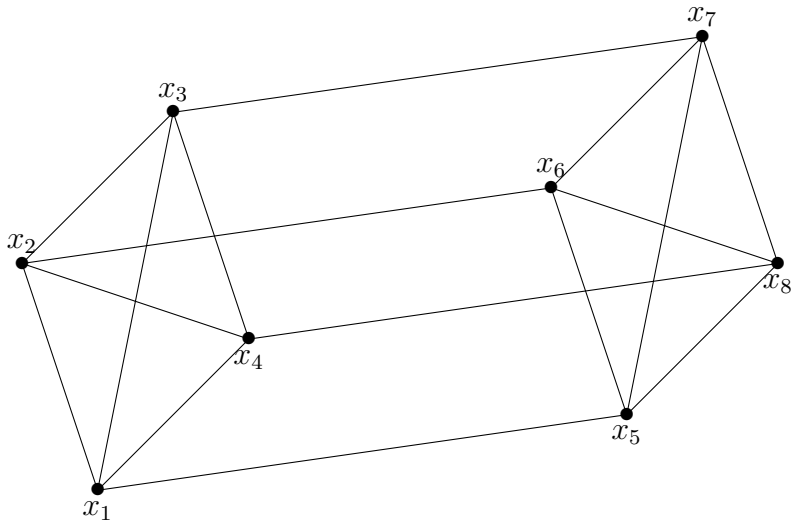


Figure 1.12 : Graphe $K_4\square K_2$

1.16.2 Produit cartésien

- Le produit cartésien de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, noté $G \times H$, est le graphe d'ensemble de sommets $V \times V'$ et (u, u') et (v, v') sont adjacents dans $G \times H$ si et seulement si $uu' \in E$ oú $vv' \in E'$;
- L'ordre de graphe $G \times H$ est égal à$|V(G)||V(H)|$;
- La taille de graphe $G \times H$ est égale à$2|E(G)||E(H)|$;
- $d_{G\times H}(u, u') = d_G(u) \times d_H(u')$.

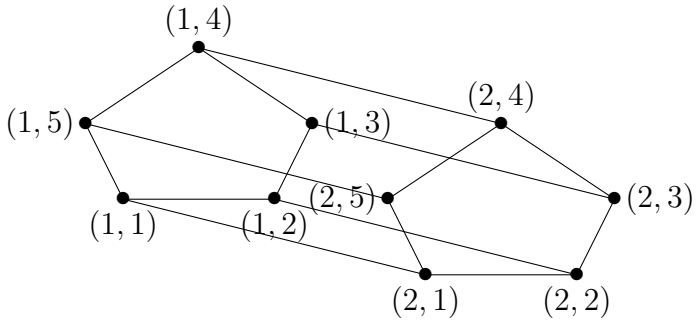


FIGURE 1.17 – Produit cartésien $C_5 \times K_2$

1.17 Graphe hypercube

- L'hypercube de dimension n, noté Q_n, est le graphe d'ordre 2^n tels que $V_{Q_n} = \{0, 1\}^n$ et deux sommets sont adjacents dans Q_n si et seulement si ils différent en exactement une seule composante ;
- Par récurrence sur n, $Q_0 = K_1$, $Q_1 = K_2$ et $Q_{n+1} = Q_n \square K_2$.
- Donc : $Q_n (n \geq 1)$ est isomorphe à

$$\underbrace{K_2 \square K_2 ... \square K_2}_{n \ fois}$$

- D'une manière générale, $Q_{n+d} = Q_n \square Q_d$.

- L'ensemble des sommets $V(Q_n)$ est résumé dans le tableau suivant :

n	$V(Q_n) =$
0	$\{0\}$
1	$\{0, 1\}$
2	$\{00, 01, 10, 11\}$
3	$\{000, 010, 100, 110, 001, 011, 101, 111\}$

Le poset illustré dans la figure 1.18 est pour les hypercubes Q_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

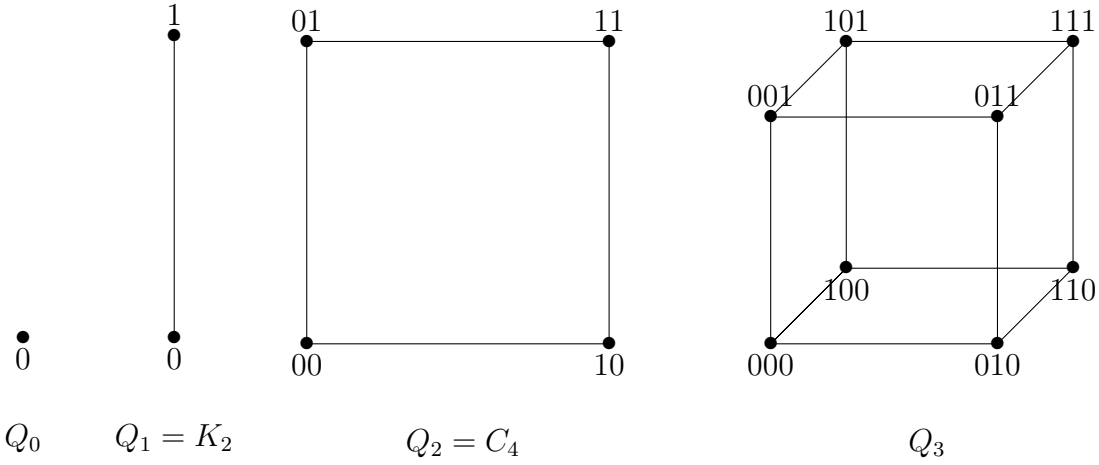


FIGURE 1.18 – Les quatre premiers hypercube

1.18 Propriétés de base des hypercubes

Pour tout $n \geq 1$,

- $| V(Q_n) | = 2^n$;
- $| E(Q_n) | = n2^{n-1}$;
- Q_n est obtenu par l'adjacence des sommets de deux copies de Q_{n-1} et les arêtes entre les deux forment un couplage parfait ;
- Q_n est un graphe n-régulier ;
- Q_n est biparti ;

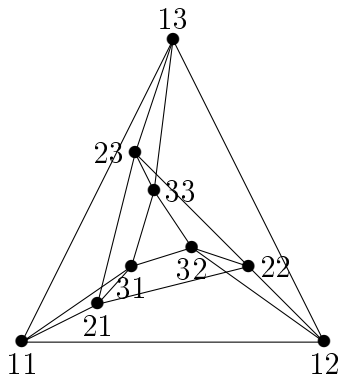
- Q_n est à la fois n-connexe et n-edge-connexe ;
- La connectivité (des sommets) et la connectivité des arêtes de Q_n sont

$$\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$$

1.19 Graphe Hamming

Les travaaux de Richard W. Hamming (1915-1998) était dans la théorie du codage. Le graphe de Hamming porte son nom. C'est le graphe d'association où les sommets sont des vecteurs de longueur d sur un alphabet de taille q. La relation (appelée distance de Hamming) de deux vecteurs est le nombre de coordonnées où ils diffèrent.

- Le graphe de Hamming $H(d, q)$, parfois aussi noté q^d, est le produit cartésien de d copies du graphe complet K_q.
- Le graphe Hamming $H(d, q)$ est d'ordre q^d et de taille $\frac{d(q-1)q^d}{2}$.
- le graphe est $(d(q-1))$-régulier car chaque sommet a $(d(q-1))$ voisins.



$H(2, 3)$

FIGURE 1.19 – Graphe Hamming $H(2, 3)$.

1.20 Coloration des graphes

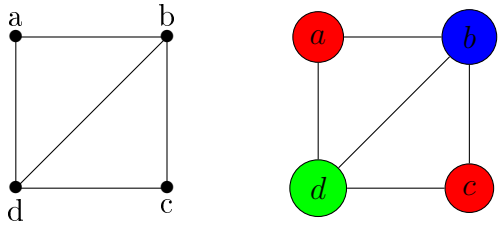
- Une coloration propre d'un graphe G est l'un des outils de la théorie des graphe qui permet de modéliser des problèmes réels.

- Une coloration propre consiste à associer à chaque sommet une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents reçoivent deux couleurs différentes.

- Le problème d'optimisation classique est de trouver une coloration avec un nombre de couleurs minimum.

- La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k stables.

- Le nombre chromatique du graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de$V$en k sous-ensembles stables.



(G)

FIGURE 1.20 – la coloration de G

CHAPITRE 2

GRAPHE DE TYPE HYPERCUBE

Introduction

L'hypercube est un graphe qui a une fascinante structure et de remarquables propriétés. Ceci a suscité l'attention de beaucoup de chercheurs qui se sont intéressés, de manière particulière, à l'étude des classes de graphes, dites de type hypercube, qui possèdent, chacune d'entre elles, une de ces propriétés. La caractérisation de l'hypercube en tant qu'élément de ces classes est devenue alors un des objectifs de multiples travaux de recherche. Nous introduisons dans ce chapitre certaines de ces classes, en mettant en évidence le rôle que l'hypercube y joue. Nous exposons aussi, d'autres caractérisations de l'hypercube avant de présenter un bref aperçu sur l'exploitation de ces informations dans le but de contribuer à la construction d'une ontologie pour les propriétés des graphes.

Rappelons que, l'hypercube (aussi appelé $n - cube$) est un graphe non orienté composé de $k = 2^n$ sommets étiquetés de 0 à 2^{n-1} tel que deux sommets sont adjacents dans le n-cube si et seulement s'ils diffèrent d'une et une seule composante.

Proposition 2. *[24]*

Il existe n façons différentes de déchirer un n-cube, c'est-à-dire de le diviser en deux sous-cubes de dimension $(n-1)$ *de manière à ce que leurs sommets respectifs soient connectés de manière bijective. En utilisant l'étiquetage de la Définition 2.1, chaque déchirure différente correspond à la division du graphe du n-cube en deux sous-graphes : l'un dont les étiquettes des sommets ont un "un" à la position i et l'autre dont les étiquettes des sommets ont un "zéro" à la position i.*
Le résultat suivant nous indique combien de façons il y a pour étiqueter un n-cube.

Proposition 3. *[24]*
Il existe $n!2^n$ *façons différentes de numéroter les* 2^n *sommets d'un n-cube de manière à être conforme à la Définition 2.1.*

Proposition 4. *[24]*

Tout nœud adjacent A et B d'un n-cube est tel que les sommets adjacents à A et ceux adjacents à B sont connectés de manière bijective.

Nous pouvons définir la parité d'un sommet comme positive si le nombre de "un" dans son étiquette binaire est pair et négative sinon. Il est clair que les sommets voisins ont une parité opposée. Le résultat suivant découle de cette propriété simple.

Proposition 5. *[24]*

Il n'y a pas de cycles de longueur impaire dans un n-cube.

.

Proposition 6. *L'n-cube est un graphe connecté de diamètre n.*

Théorème 1. *[24]*
Un graphe $G = (V, E)$ *est un* $n-$*cube si et seulement si*

1. *V a 2^n sommets ;*

2. *chaque sommet a un degré n ;*

3. *G est connecté ;*

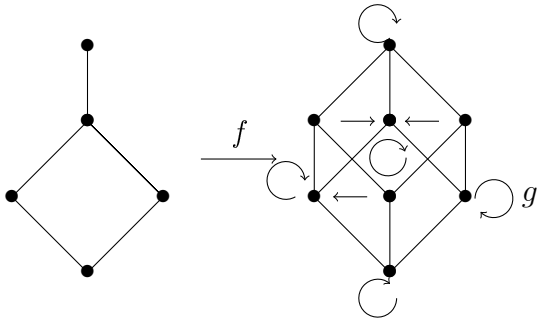
4. *deux sommets adjacents A et B sont tels que les sommets adjacents à A et ceux adjacents à B sont reliés de manière bijective.*

Théorème 2. *[22]*

Pour tout $n \geq 2$, $\gamma(Q_n) = (n-4)2^{n-3} + 1$.

2.1 Les premières caractérisations de l'hypercube apparentées aux (0,2)-graphes

Définition 1. *Etant donnés deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H).E(H))$, un homomorphisme de G dans H est une application de V(G) dans V(H) telle que, si u et v sont adjacents dans G leurs images le sont aussi dans H. Nous dirons que G est un "retract" de H ssi il existe 2 homomorphismes f de G dans H et g de H dans G tels que, pour tout sommet a de G, on ait $g(f(a)) = a$.*



G retract de Q_3

Les graphes de couverture d'un treillis distributif sont des sous graphes d'un hypercube (Duffus, Rival [7]) ; plus précisément ces auteurs ont démontré le résultat suivant.

Théorème 3. *[7]*

Un graphe connexe $G = (V, E)$ est le graphe de couverture d'un treillis distributif de longueur n si et seulement si G est un retract d'un hypercube de dimension n et $diam(G) = n$.

Parmi ces retracts, on peut alors caractériser les hypercubes par une propriété supplémentaire et donc prolonger le résultat d'Alvarez en une caractérisation de l'hypercube. On obtient ainsi trivialement :

Théorème 4. *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G satisfait aux conditions (1), (2), (3) et (4) du théorème 3 et vérifie*
(5) $|V| = 2^{diam(G)}$.

Ou

Théorème 5. *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G satisfait aux conditions (1), (2), (3) et (4) du théorème 3 et vérifie*
(5) $\forall x \in V(G) \exists y \in V(G)$ tel que $d(x, y) = diam(G)$.

S.Foldes a donné la première caractérisation en tant que telle de l'hypercube :

Théorème 6. *[9]*

Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G satisfait aux conditions suivantes :

(1) G est biparti

(2) Pour toute paire x, y de sommets de G le nombre de plus courtes chaînes entre x et y est $d(x, y)$!.

Comme S. Foldes puis H.M. Mulder l'ont remarqué le théorème 7 admet aussi la formulation suivante.

Théorème 7. *[16]*

Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si un graphe intervalle-régulier biparti.

D.Mac Fall est l'auteur du théorème suivant qui est lui aussi proche de la caractérisation de S. Foldes .

Théorème 8. *[6]*

Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G satisfait aux conditions suivantes :

(1) G est biparti

(2) Pour toute paire x,y de sommets de G
$w(x, y) = \begin{pmatrix} d(x, y) \\ [d(x, y)/2] \end{pmatrix}$.

La caractérisation suivante est due á J.M. Laborde :

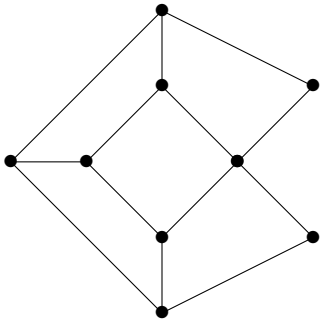
Théorème 9. *[11]*

Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G satisfait aux conditions suivantes :

(1) 2 sommets à distance 2 sont reliés par exactement 2 chemins
de longueur 2

(2) G ne contient pas de triangle

(3) G ne contient pas de sous graphe isomorphe à



(4) Il existe un entier n tel que $|V(G)| = 2^n$ *et* $|E(G)| = n2^{n-1}$.

Définition 2. *[18]*

Un graphe simple connexe est un (0,2)-graphe si et seulement si deux sommets distincts ont exactement 2 voisins communs ou aucun.

Une propriété fondamentale de l'hypercube est d'être un (0,2)-graphe.

Cette propriété sous-jacente dans le théorème 10 n'est pas sans relation non plus avec les conditions (2) des théorèmes 3,7 et 9.

Indépendamment J.M. Laborde, S.P. Rao Hebbare et H.M. Mulder l'ont utilisée pour obtenir la caractérisation suivante, aboutissement de ce type de résultat.

Théorème 10. *[12]*

Soit G un (0,2)-graphe. Alors G est régulier et $|V(G)| \leq 2^n$*, où n est le degré de G. De plus G est un hypercube si et seulement si* $|V(G)| = 2^n$.

2.2 Propriétés des (0,2)-graphes

Proposition 7. *[12]*

Un (0,2)-graphe est régulier.

L'ordre d'un (0,2)-graphe est borné comme le montre le résultat suivant :

Proposition 8. *[19]*

Soit G un (0,2)-graphe de degré d, on a :

$$1 + \frac{d(d-1)}{2} \leq |V(G)| \leq 2^d.$$

Pour les (0,2)-graphes bipartis, la borne inférieure dans la Proposition 7 peut être améliorée :

Proposition 9. *[15]*

Si G un (0,2)-graphe de degré d tel que diam(G) ≥ 4, alors on a diam(G) ≤ d.

Brouwer et Mulder ont montré, pour la connectivité d'un (0,2)-graphe, le résultat suivant :

2.3 Caractérisations de l'hypercube comme (0,2)-graphe

Parmi les (0,2)-graphes, l'hypercube joue un rôle très particulier, dû au fait que plusieurs (0,2)-graphes sont construits à partir de l'hypercube et héritent donc de certaines de ses propriétés. De nombreuses caractérisations de l'hypercube ont alors été établies et la première caractérisation de l'hypercube en tant qu'un (0,2)-graphe a été prouvée indépendamment par Mulder et Laborde-Rao Hebbare :

Théorème 11. *[12]*

Soit G un (0, 2)-graphe de degré d, alors $|V(G)| \leq 2^d$.. De plus G est un Hypercube de dimension d si et seulement si $|V(G)| = 2^d$.

Une autre caractérisation a été obtenue par Mollard :

Théorème 12. *[15]*

Soit G un (0,2)-graphe G d-régulier alors

1.$D(G) \leq d$;

2. G est un hypercube si et seulement si $D(G) = d$.

Une autre caractérisation a été donnée en termes de décomposition en niveaux :

Théorème 13. *[3]*

Soit G un (0,2)-graphe tel qu'il existe une décomposition en niveaux où tout 4-cycle rencontre trois niveaux, alors G est un hypercube.

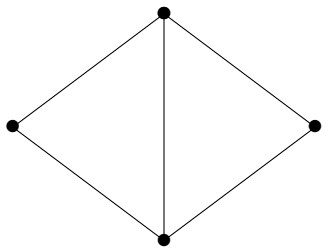
2.4 D'autres caractérisations de l'hypercube ont été étendues aux graphes de Hamming.

Les graphes de Hamming, produits cartésiens de graphes complets sont une généralisation naturelle de l'hypercube.

Définition 3. *Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des entiers positifs. Le graphe de Hamming $H_{a_1,a_2,\cdots,a_n}$ est le graphe dont les sommets sont les éléments du produit cartésien d' ensembles de a ; éléments et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs correspondants diffèrent en exactement une composante.*

Une première caractérisation des graphes de Hamming a été obtenue par H.M. Mulder comme généralisation de la caractérisation de l'hypercube. En temps que graphe intervalle régulier biparti (Théorème 8).

Les graphes de Hamming ne sont pas, en général, bipartis ; cependant ils ne possèdent pas $K_4 - e$ comme sous graphe.



$K_4 - e$

Théorème 14. *[16]*

Un graphe connexe G= (V,E) est un graphe de Hamming si et seulement si G n'admet pas

$K_4 - e$ comme sous graphe, est intervalle régulier et vérifie :

$$\forall u, \forall v, \forall w, I(u,v) \cap I(v,w) = \{v\} \Rightarrow d(u,w) \geq max\{d(u,v), d(v,w)\}$$

D'autres de l'hypercube ont été étendues aux graphes de Hamming.

Définition 4. *Un graphe médian est un graphe tel que, pour tout triplet x,y,z de sommets, l'intersection des trois intervalles $I(x,y)$, $I(y,z)$ et $I(x,z)$ est réduite à un sommet.*

Théorème 15. *[17]*

Un graphe connexe $G = (V,E)$ est un hypercube si et seulement si G est un graphe médian régulier.

Le même auteur a également caractérisé les hypercubes comme étant les graphes médians G tels que, pour tout sommet, il existe un sommet unique à distance égale au diamètre de G. Or H.J. Bandelt a prouvé [2] que les graphes médians sont exactement les retracts des hypercubes ; cela permet indirectement de prouver le théorème 4 comme un corollaire de cette caractérisation.

H.M. Mulder [19] a introduit la notion de graphe quasi-médian pour obtenir un analogue au théorème 14 pour les graphes de Hamming.

Théorème 16. *[23]*

Pour tout graphe G tel que $C(G) = (Q_1, Q_2 \dots Q_{n-1})$ avec$n \geq 3$ on a $|V(G)| \geq 2^n$. De plus si $|V(G)| = 2^n$ alors G est isomorphe à Q_n.

Ce résultat a été étendu aux graphes de Hamming :

Théorème 17. *[8]*

Soient $n_1, n_2 \dots n_r$ des entiers $(r \geq 2)$ tels que $n_i > 1$ pour tout i et soit G un graphe tel que l'ensemble de ses sous graphes convexes propres non isomorphes $C(G)$ est égal à $C(H_{n_1,n_2\dots,n_r})$. Si il existe i avec $n_i > 2$ ou si $r > 2$ alors $|V(G)| \geq n_1 n_2 \dots n_r$. De plus si $|V(G)| = n_1, n_2 \dots n_r$, alors G est isomorphe à $H_{n_1,n_2\dots n_r}$.

Théorème 18. *Soit G un graphe simple connexe ne contenant pas G_a et G_b comme sous graphe et tel que deux sommets quelconques à distance 2 possèdent exactement deux voisins communs on a*

$$|V(G)| \leq \prod_{i=2}^{P} iN_i$$

et

$$diamG \leq \sum_{i=2}^{P} N_i$$

De plus

$$|V(G)| \leq \prod_{i=2}^{P} iN_i$$

si et seulement si G est un graphe de Hamming.

2.5 Résultats sur la coloration

Proposition 10. *Soit G un graphe simple d'ordre n.*

1. $\chi(G) = 1$ *si et seulement si G n'a pas d'arêtes.*
2. $\chi(G) \leq n$.
3. *Si G a au moins une arête alors, G est biparti si et seulement si $\chi(G) = 2$.*
4. $\chi(K_n) = n$ *pur tout* $n \geq 1$.
5. $\chi(C_n) = 2$ *si n est pair et* $\chi(C_n) = 3$ *si n est impair.*
6. *Pour tout sous graphe H de G on a* $\chi(H) \leq \chi(G)$.
7. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Proposition 11. *[1]*

Soit $G = (V_G; E_G)$ un graphe simple d'ordre n de degré maximum $\Delta(G)$, alors

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Cependant,Brooks a amélioré cette borne (théorème 27).Il est claire que le résultat de la proposition (25) équivalent à $\chi(G) \leq \Delta(G)$ ou $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ puisque $\Delta(G)$ est un entier,d'où le théorème 26 :

Proposition 12. *[1]*

Soit $G = (V_G; E_G)$ un graphe simple connexe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$.

Si G est un cycle élémentaire impair ou un graphe complet, alors $\chi = \Delta + 1$ (Dans le cas contraire nous avons $\chi \leq \Delta$, c'est le théorème 2.1).

Proposition 13. *[1]*

Soit $G = (V_G, E_G)$ un graphe simple d'ordre n, alors

$$\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil \leq \chi(G)$$

et

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$$

.

En combinant la proposition 24 et la proposition 26 nous obtenons un encadrement du nombre chromatique d'un graphe simple.

Corollaire [1]

Soit $G = (V_G, E_G)$ un graphe simple d'ordre n, alors

$$\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil \leq \chi(G) \leq \Delta + 1.$$

Proposition 14. *[1]*

Soit $G = (V_G, E_G)$ un graphe simple d'ordre n. Alors

$$\chi(G) \leq 1 + max\{\delta(H),\ H\ sous - graphe\ induit\ de\ G\} \leq 1 + \Delta(G).$$

Théorème 19. *(Brooks [1] [5] [13])*

Soit G un graphe simple connexe. Si G n'est ni un cycle d'ordre impair,ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

La borne obtenue par le théorème précédent peut être améliorée en considérant le degré minimum des sous-graphes induits :

Théorème 20. *(Halin 1967)*

Soit G un graphe simple k-dégénéré. Alors $\chi(G) \leq K + 1$.

CHAPITRE 3

COLORATION DE CERTAIN GRAPHES DE TYPE HYPERCUBE

3.1 Graphe Hamming

Définition 5. *Le graphe Hamming $H(d,q) = (V_H, E_H)$ est définit par :*

- $V_H = S^d = S \times S \times \ldots \times S = \{X_d = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_d); X_d \in S\}$
- $E_H = \{X_d Y_d;\ X_d, Y_d \in V_H \text{ et } x_k \neq y_k \text{ et } x_l = y_l \text{ si } l \neq k\}$

∗ Pour $H(3,2), S = \{1,2\}$ et on a :

- $V_H = S^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_d \in S\}$ et $\mid V_H \mid = 2^3 = 8$.
- Les voisinages ouverts des sommets $x \in V_{H(3,2)}$ est résumé dans le tableau suivant :

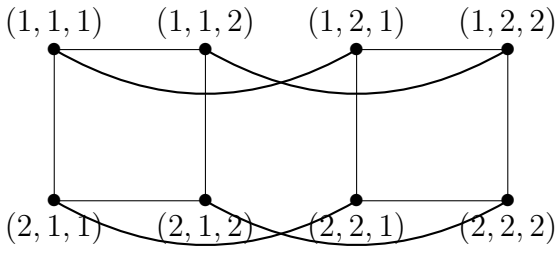


Figure 3.1 – Graphe $H(3,2)$

x	$N_H(x)$
$(1,1,1)$	$(1,1,2);(1,2,1);(2,1,1)$
$(1,1,2)$	$(1,1,1);(1,2,2);(2,1,2)$
$(1,2,1)$	$(2,2,1);(1,1,1);(1,2,2)$
$(2,1,1)$	$(1,1,1);(2,1,2);(2,2,1)$
$(2,2,1)$	$(2,1,1);(1,2,1);(2,2,2)$
$(2,1,2)$	$(2,1,1);(2,2,2);(1,1,2)$
$(1,2,2)$	$(1,2,1);(1,1,2);(2,2,2)$
$(2,2,2)$	$(1,2,2);(2,1,2);(2,2,1)$

TABLE 3.1 – Les voisinages ouverts des sommets de $H(3,2)$

∗ Rappelons que $H(d,2) = \underbrace{K_2 \square K_2 \square \ldots \square K_2}_{d\ fois}$

Proposition 15. · *Le graphe $H(3,2)$ est un graphe 3-régulier et son nombre chromatique est égal á $\chi(H(3,2)) = 2$.*

· *Plus généralement, le graphe $H(d,2)$ est le graphe d-régulier et son nombre chromatique est égal á $\chi(H(d,2)) = 2$.*

Preuve.

- D'aprés le tableau précédente 3.1 $\forall x \in V_H; d_{H(3,2)}(x) = 3$.
- Le graphe $H(3,2)$ est l'hypercube Q_3 donc un graphe biparti. Alors le nombre de coloration est égal á $\chi(H) = 2$.

■

∗ Pour $H(2,3), S = \{1,2,3\}$ et on a :

· $V_H = S^2 = S \times S = \{(x_1,x_2); x_d \in S\}$, $\mid V_H \mid = 3^2 = 9$.

· Le tableau suivant résumé les voisinages ouverts des sommets $x \in V_{H(2,3)}$:

V_H	$N_H(x)$
$(1,1)$	$(1,2);(2,1);(3,1);(1,3)$
$(1,2)$	$(1,1);(2,2);(1,3);(3,2)$
$(1,3)$	$(2,3);(1,1);(1,2);(3,3)$
$(2,1)$	$(1,1);(2,2);(2,3);(3,1)$
$(2,3)$	$(2,1);(2,2);(1,3),(3,3)$
$(2,2)$	$(2,1);(2,3);(1,2);(3,2)$
$(3,1)$	$(2,1);(3,2);(1,1);(3,3)$
$(3,2)$	$(1,2);(2,2);(3,1);(3,3)$
$(3,3)$	$(3,2);(2,3);(3,1);(1,3)$

TABLE 3.2 – Les voisinages ouverts des sommets de $H(2,3)$

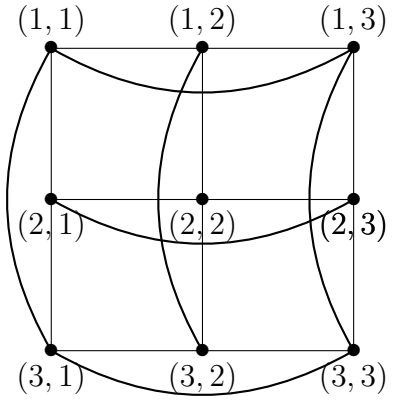


FIGURE 3.2 – Graphe $H(2,3)$

$*$ $H(2,3) = K_3 \times K_3$

Proposition 16. *Le graphe $H(2,3)$ est un graphe 4-régulier et son nombre chromatique est égal á $\chi(H(2,3)) = 3$*

Preuve.

- D'aprés le tableau précédent $\forall x \in V_H; d_{H(2,3)}(x) = 4$.
- On á un clique $\{(1,1);(1,2);(1,3)\}$ alors $\chi(H(2,3)) \geq 3$
- On forme des stable :$\{\{(1,1);(2,3);(3,2)\},\{(1,2);(2,1);(3,3)\},\{(1,3);(2,2);(3,1)\}\}$.

V_H	$N_H(x)$
$(1,1,1)$	$(1,1,2);(1,1,3);(1,2,1);(1,3,1);(2,1,1);(3,1,1)$
$(1,1,2)$	$(1,1,1);(1,1,3);(1,2,2);(1,3,2);(2,1,2);(3,1,2)$
$(1,1,3)$	$(1,1,1);(1,1,2);(1,2,3);(1,3,3);(2,1,3);(3,1,3)$
$(1,2,1)$	$(2,2,1);(1,1,1);(1,2,2);(1,2,3);(1,3,1);(3,2,1);$
$(1,2,2)$	$(1,2,1);(1,2,3);(1,1,2);(1,3,2);(3,2,2);(2,2,2)$
$(1,2,3)$	$(1,2,1);(1,2,2);(1,1,3);(1,3,3);(3,2,3);(2,2,3)$
$(1,3,1)$	$(1,3,2);(1,2,1);(1,1,1);(1,3,3);(2,3,1);(3,3,1)$
$(1,3,2)$	$(1,1,2);(1,2,2);(1,3,1);(1,3,3);(2,3,2);(3,3,2)$
$(1,3,3)$	$(1,2,3);(1,1,3);(1,3,2);(1,3,1);(2,3,3);(3,3,3)$
$(2,1,1)$	$(1,1,1);(2,1,2);(2,1,3);(2,2,1);(2,3,1);(3,1,1)$
$(2,1,2)$	$(2,1,1);(2,2,2);(1,1,2);(2,1,3);(2,3,2);(3,1,2)$
$(2,1,3)$	$(2,1,2);(2,1,1);(1,1,3);(2,2,3);(2,3,3);(3,1,3)$
$(2,2,1)$	$(2,2,3);(1,2,1);(2,2,2);(2,3,1);(3,2,1);(2,1,1)$
$(2,2,2)$	$(1,2,2);(2,1,2);(2,2,1);(2,2,3);(2,3,2);(3,2,2)$
$(2,2,3)$	$(2,2,1);(1,2,3);(2,2,2);(2,3,3);(3,2,3);(2,1,3)$
$(2,3,1)$	$(2,3,2);(1,3,1);(2,1,1);(2,3,3);(3,3,1);(2,2,1)$
$(2,3,2)$	$(2,3,1);(1,3,2);(2,1,2);(2,3,3);(3,3,2);(2,2,2)$
$(2,3,3)$	$(2,3,2);(2,3,1);(2,1,3);(2,2,3);(3,3,3);(2,2,3)$
$(3,1,1)$	$(1,1,1);(3,1,2);(3,1,3);(3,2,1);(3,3,1);(2,1,1)$
$(3,1,2)$	$(3,1,1);(3,2,2);(3,1,3);(2,1,2);(3,3,2);(1,1,2)$
$(3,1,3)$	$(3,1,1);(3,1,2);(3,2,3);(1,1,3);(3,3,3);(2,1,3)$
$(3,2,1)$	$(3,2,3);(1,2,1);(2,2,1);(3,3,1);(3,2,2);(3,1,1)$
$(3,2,2)$	$(3,2,3);(1,2,2);(3,2,1);(3,3,2);(2,2,2);(3,1,2)$
$(3,2,3)$	$(3,3,3);(1,2,3);(3,2,1);(3,1,3);(3,2,2);(2,2,3)$
$(3,3,1)$	$(2,3,1);(1,3,1);(3,1,1);(3,3,3);(3,3,2);(3,2,1)$
$(3,3,2)$	$(2,3,2);(3,3,1);(1,3,2);(3,3,3);(3,1,2);(3,2,2)$
$(3,3,3)$	$(2,3,3);(1,3,3);(3,3,1);(3,1,3);(3,3,2);(3,2,3)$

TABLE 3.3 – Les voisinages ouverts des sommets de $H(3,3)$

Alors $\chi(H) \leq 3$

Donc on á $\chi(H) = 3$.

■

∗ Pour $H(3,3), S = \{1,2,3\}$ et on a :

· $V_H = S^3 = S \times S \times S = \{(x_1, x_2 \ldots, x_3); x_d \in S\}$, $\mid V_H \mid = 3^3 = 27$.

· L'ensemble des voisins de $V_{H(3,3)}$ est résumé sur le tableau suivant :

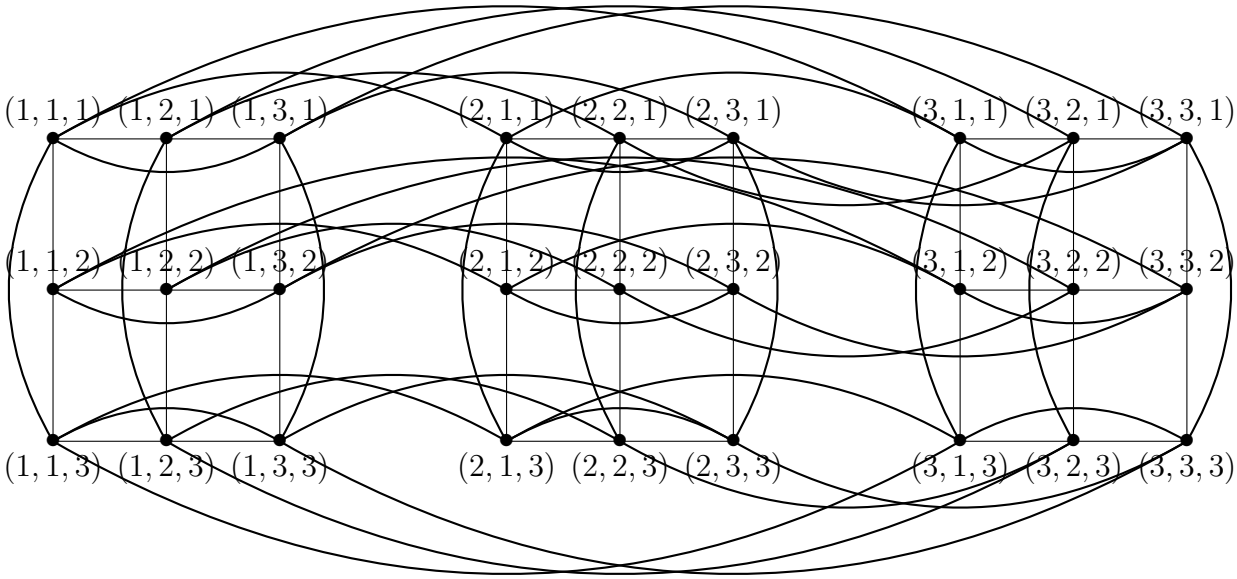


FIGURE 3.3 – Graphe $H(3,3)$

$*$ $H(3,3) = K_3 \times K_3 \times K_3$

Proposition 17. *Le graphe $H(3,3)$ est un graphe 6-régulier et son nombre chromatique est égal á $\chi(H(3,3)) = 3$.*

Preuve.

- D'aprés le tableau précédent $\forall x \in V_H; d_{H(3,3)}(x) = 6$.
- On á un clique $\{(1,1,1);(1,1,2)(1,1,3)\}$ alors $\chi(H) \geq 3$
- On forme des stable : $\{\{(1,1,1);(1,2,2);(1,3,3);(2,2,1);(2,1,3);$
  $(2,3,2);(3,1,2);(3,2,3);(3,3,1)\},\{(1,1,2);(1,2,3);(1,3,1);(2,1,1);$
  $(2,2,2);(3,1,3);(3,2,1);(3,3,2)\},\{(1,1,3);(1,2,1);(3,3,3);(2,2,3);$
  $(1,3,2);(2,1,2);(3,2,2)(2,3,1);(3,1,1)\}$.

  Alors $\chi(H) \leq 3$

  Donc on á $\chi(H) = 3$.

■

On peut des montrer d'un autre manière ce résultat suivant :

Preuve.

- $S = \{1, 2, 3\}$, $V_{H(3,3)} = \{(x, y, z);\ x, y, z \in S\}$
- Pour x *et* y fixés :

  $V_{xy} = \{(x, y, z);\ z \in S\}$, forment 3^2 partition de $V_{H(3,3)}$.

$$V_{H(3,3)} = \cup_{x \in S}(\cup_{y \in S} V_{xy})$$

- $\langle V_{xy} \rangle$ est une clique 3 de $H(3, 3)$

  Donc $\chi(\langle V_{xy} \rangle) = 3$

  Par suite , $\chi(H(3, 3)) = \chi(\langle V_{xy} \rangle) = 3$

■

$*$ Pour $H(2, 4),\ S = \{1, 2, 3, 4\}$ et on a :

· $V_H = S^2 = S \times S = \{(x_i^1, x_i^2); x_i^d \in S\}$, $\mid V_H \mid = 4^2 = 16$;

· L'ensemble des voisins de $V_{H(2,4)}$ est résumé sur le tableau suivant :

V_H	$N_H(x)$
$(1,1)$	$(1,2);(2,1);(3,1);(1,3);(4,1);(1,4)$
$(1,2)$	$(1,1);(2,2);(1,3);(3,2);(4,2);(1,4)$
$(1,3)$	$(2,3);(1,1);(1,2);(3,3);(4,3);(1,4)$
$(1,4)$	$(1,3);(1,1);(1,2);(4,4);(4,3);(2,4)$
$(2,1)$	$(1,1);(2,2);(2,3);(3,1);(4,1);(2,4)$
$(2,2)$	$(2,1);(2,3);(1,2);(3,2);(4,2);(2,4)$
$(2,3)$	$(2,1);(2,2);(1,3),(3,3);(4,3);(2,4)$
$(2,4)$	$(2,3);(1,4);(2,1);(4,4);(3,4);(2,2)$
$(3,1)$	$(2,1);(3,2);(1,1);(3,3);(4,1);(3,4)$
$(3,2)$	$(1,2);(2,2);(3,1);(3,3);(4,2);(3,4)$
$(3,3)$	$(3,2);(2,3);(3,1);(1,3);(4,3);(3,4)$
$(3,4)$	$(3,2);(3,3);(3,1);(1,4);(4,4);(2,4)$
$(4,1)$	$(2,1);(3,1);(1,1);(4,3);(4,2);(4,4)$
$(4,2)$	$(2,2);(3,2);(1,2);(4,3);(4,1);(4,4)$
$(4,3)$	$(2,3);(3,3);(1,3);(4,1);(4,2);(4,4)$
$(4,4)$	$(2,4);(3,4);(1,4);(4,3);(4,2);(4,1)$

TABLE 3.4 – Les voisinages ouverts des sommets de $H(2,4)$

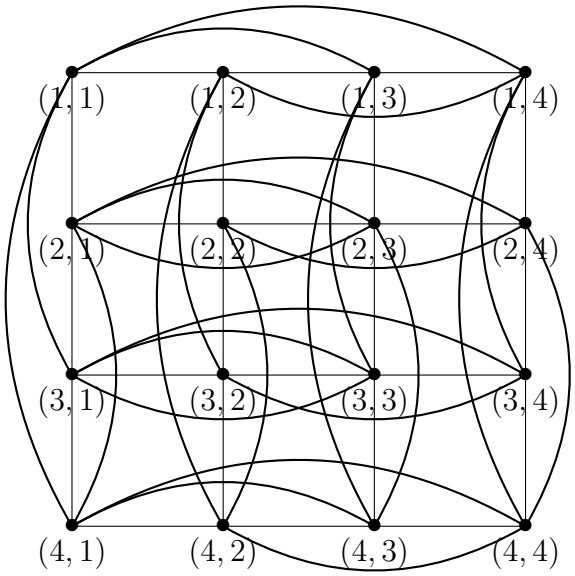


FIGURE 3.4 – Graphe $H(2,4)$

$*$ $H(2,4) = K_4 \times K_4$;

Proposition 18. *Le graphe $H(2,4)$ est un graphe 6-régulier et son nombre chromatique est égal á $\chi(H(2,4)) = 4$*

Preuve.

- D'aprés le tableau précédent $\forall x \in V_H; d_{H(2,4)}(x) = 6$.
- On á un clique $\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4)\}$ alors $\chi(H) \geq 4$
- On forme des stable :$\{\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\},\{(1,2);(2,3);(3,4);(4,1)\}$, $\{(1,3);(2,4);(3,1);(4,2)\},\{(1,4);(2,1);(3,2);(4,3)\}\}$.

  Alors $\chi(H) \leq 4$

  Donc on á $\chi(H) = 4$.

■

$*$ Pour $H(3,4),\ S = \{1,2,3,4\}$ et on a :

· $V_H = S^3 = S \times S \times S = \{(x_1, x_2, 3); x_d \in S\}$, $\mid V_H \mid = 4^3 = 64$.

· L'ensemble des voisins de $V_{H(3,4)}$ est résumé sur le tableau suivant :

V_H	$N_H(x)$
$(1,1,1)$	$(1,1,2);(1,1,3);(1,1,4);(1,2,1);(1,3,1);(1,4,1);(2,1,1);(3,1,1);(4,1,1)$
$(1,1,2)$	$(1,1,1);(1,1,3);(1,1,4);(1,2,2);(1,3,2);(1,4,2);(2,1,2);(3,1,2);(4,1,2)$
$(1,1,3)$	$(1,1,1);(1,1,2);(1,1,4);(1,2,3);(1,3,3);(1,4,3);(2,1,3);(3,1,3);(4,1,3)$
$(1,1,4)$	$(1,1,1);(1,1,2);(1,1,3);(1,2,4);(1,3,4);(1,4,4);(2,1,4);(3,1,4);(4,1,4)$
$(1,2,1)$	$(2,2,1);(1,1,1);(1,2,2);(1,2,3);(1,2,4);(1,3,1);(1,4,1);(3,2,1);(4,2,1)$
$(1,2,2)$	$(1,2,1);(1,2,3);(1,2,4);(1,1,2);(1,3,2);(1,4,2);(3,2,2);(2,2,2);(4,2,2)$
$(1,2,3)$	$(1,2,1);(1,2,2);(1,2,4);(1,1,3);(1,3,3);(1,4,3);(3,2,3);(2,2,3);(4,2,3)$
$(1,2,4)$	$(1,2,1);(1,2,2);(1,2,3);(1,1,4);(1,3,4);(1,4,4);(3,2,4);(2,2,4);(4,2,4)$
$(1,3,1)$	$(1,3,2);(1,2,1);(1,1,1);(1,3,3);(1,4,1);(1,3,4);(2,3,1);(3,3,1);(4,3,1)$
$(1,3,2)$	$(1,1,2);(1,2,2);(1,3,1);(1,3,3);(1,4,2);(1,3,4);(2,3,2);(3,3,2);(4,3,2)$
$(1,3,3)$	$(1,2,3);(1,1,3);(1,3,2);(1,3,1);(1,4,3);(1,3,4);(2,3,3);(3,3,3);(4,3,3)$
$(1,3,4)$	$(1,2,4);(1,1,4);(1,3,2);(1,3,1);(1,4,4);(1,3,4);(2,3,4);(3,3,4);(4,3,4)$
$(1,4,1)$	$(1,3,1);(1,2,1);(1,1,1);(1,3,3);(1,4,3);(1,4,4);(2,4,1);(3,4,1);(4,4,1)$
$(1,4,2)$	$(1,1,2);(1,2,2);(1,3,2);(1,4,3);(1,4,1);(1,4,4);(2,4,2);(3,4,2);(4,4,2)$
$(1,4,3)$	$(1,2,3);(1,1,3);(1,3,3);(1,4,1);(1,4,2);(1,4,4);(2,4,3);(3,4,3);(4,4,3)$
$(1,4,4)$	$(1,2,4);(1,1,4);(1,3,4);(1,4,1);(1,4,2);(1,4,3);(2,4,4);(3,4,4);(4,4,4)$
$(2,1,1)$	$(1,1,1);(2,1,2);(2,1,3);(2,1,4);(2,2,1);(2,3,1);(2,4,1);(3,1,1);(4,1,1)$
$(2,1,2)$	$(2,1,1);(2,2,2);(1,1,2);(2,1,3);(2,1,4);(2,3,2);(2,4,2);(3,1,2);(4,1,2)$
$(2,1,3)$	$(2,1,2);(2,1,1);(1,1,3);(2,1,4);(2,2,3);(2,3,3);(2,4,3);(3,1,3);(4,1,3)$
$(2,1,4)$	$(2,1,2);(2,1,1);(1,1,4);(3,1,4);(2,2,4);(2,3,4);(2,4,4);(2,1,3);(4,1,4)$
$(2,2,1)$	$(2,2,3);(1,2,1);(2,2,2);(2,3,1);(2,4,1);(2,2,4);(3,2,1);(2,1,1);(4,2,1)$
$(2,2,2)$	$(1,2,2);(2,1,2);(2,2,1);(2,2,3);(2,4,2);(2,2,4);(2,3,2);(4,2,2);(3,2,2)$
$(2,2,3)$	$(2,2,1);(1,2,3);(2,2,2);(2,3,3);(2,4,3);(3,2,3);(2,2,4);(2,1,3);(4,2,3)$
$(2,2,4)$	$(1,2,4);(2,1,4);(2,2,1);(2,2,3);(2,4,4);(2,2,2);(2,3,4);(4,2,4);(3,2,4)$
$(2,3,1)$	$(2,3,2);(1,3,1);(2,1,1);(2,4,1);(2,3,3);(2,3,4);(3,3,1);(2,2,1);(4,3,1)$
$(2,3,2)$	$(2,3,1);(1,3,2);(2,1,2);(2,3,3);(2,4,2);(3,3,2);(2,3,4);(2,2,2);(4,3,2)$
$(2,3,3)$	$(2,3,2);(2,3,1);(1,3,3);(2,1,3);(2,2,3);(3,3,3);(4,3,3);(2,4,3);(2,3,4)$
$(2,3,4)$	$(2,3,1);(1,3,4);(2,1,4);(2,3,3);(2,4,4);(3,3,4);(2,2,4);(2,3,2);(4,3,4)$
$(2,4,1)$	$(2,4,2);(1,4,1);(2,1,1);(2,4,3);(2,3,1);(2,4,4);(3,4,1);(2,2,1);(4,4,1)$
$(2,4,2)$	$(2,4,1);(1,4,2);(2,1,2);(2,3,2);(2,4,4);(3,4,2);(2,4,3);(2,2,2);(4,4,2)$
$(2,4,3)$	$(2,4,2);(2,4,1);(1,4,3);(2,1,3);(2,2,3);(2,3,3);(4,4,3);(2,4,4);(3,4,3)$
$(2,4,4)$	$(2,3,4);(1,4,4);(2,1,4);(2,4,3);(2,4,2);(3,4,4);(2,2,4);(2,4,1);(4,4,4)$
$(3,1,1)$	$(1,1,1);(3,1,2);(3,1,3);(3,2,1);(3,3,1);(2,1,1);(3,4,1);(3,1,4);(4,1,1)$
$(3,1,2)$	$(3,1,1);(3,2,2);(3,1,3);(2,1,2);(3,3,2);(1,1,2);(3,4,2);(3,1,4);(4,1,2)$
$(3,1,3)$	$(3,1,1);(3,1,2);(3,2,3);(1,1,3);(3,3,3);(2,1,3);(3,4,3);(3,1,4);(4,1,3)$
$(3,1,4)$	$(3,1,2);(3,1,3);(3,2,4);(1,1,4);(3,3,4);(2,1,4);(3,4,4);(3,1,1);(4,1,4)$
$(3,2,1)$	$(3,2,3);(1,2,1);(2,2,1);(3,3,1);(3,2,2);(3,1,1);(3,2,4);(3,4,1);(4,2,1)$
$(3,2,2)$	$(3,2,3);(1,2,2);(3,2,1);(3,3,2);(2,2,2);(3,1,2);(3,2,4);(3,4,2);(4,2,2)$
$(3,2,3)$	$(3,3,3);(1,2,3);(3,2,1);(3,1,3);(3,2,2);(3,2,4);(2,2,3);(3,4,3);(4,2,3)$
$(3,2,4)$	$(3,3,4);(1,2,4);(3,2,1);(3,1,4);(3,2,2);(3,2,3);(2,2,4);(3,4,4);(4,2,4)$
$(3,3,1)$	$(2,3,1);(1,3,1);(3,1,1);(3,3,3);(3,3,2);(3,2,1);(3,4,1);(3,3,4);(4,3,1)$
$(3,3,2)$	$(2,3,2);(1,3,2);(3,1,2);(3,3,3);(3,3,1);(3,2,2);(3,4,2);(3,3,4);(4,3,2)$

$(3,3,3)$	$(2,3,3);(1,3,3);(3,1,3);(3,3,1);(3,3,2);(3,2,3);(3,4,3);(3,3,4);(4,3,3)$
$(3,3,4)$	$(2,3,4);(1,3,4);(3,1,4);(3,3,1);(3,3,2);(3,2,4);(3,4,4);(3,3,3);(4,3,4)$
$(3,4,1)$	$(2,4,1);(1,4,1);(3,1,1);(3,3,1);(3,4,2);(3,2,1);(3,4,4);(3,4,3);(4,4,1)$
$(3,4,2)$	$(3,4,1);(1,4,2);(3,1,2);(3,3,2);(3,4,3);(3,2,2);(3,4,4);(2,4,2);(4,4,2)$
$(3,4,3)$	$(3,4,1);(1,4,3);(3,1,3);(3,3,3);(3,4,2);(3,2,3);(3,4,4);(2,4,3);(4,4,3)$
$(3,4,4)$	$(3,4,1);(1,4,4);(3,1,4);(3,4,2);(3,4,3);(3,2,4);(3,3,4);(2,4,4);(4,4,4)$
$(4,1,1)$	$(1,1,1);(4,1,2);(4,1,3);(4,2,1);(4,3,1);(2,1,1);(4,4,1);(4,1,4);(3,1,1)$
$(4,1,2)$	$(4,1,1);(4,2,2);(4,1,3);(2,1,2);(4,3,2);(1,1,2);(4,4,2);(4,1,4);(3,1,2)$
$(4,1,3)$	$(4,1,1);(4,1,2);(4,2,3);(1,1,3);(4,3,3);(2,1,3);(4,4,3);(4,1,4);(3,1,3)$
$(4,1,4)$	$(4,1,2);(4,1,3);(4,2,4);(1,1,4);(4,3,4);(2,1,4);(4,4,4);(4,1,1);(3,1,4)$
$(4,2,1)$	$(4,2,3);(1,2,1);(2,2,1);(4,3,1);(4,2,2);(4,1,1);(4,2,4);(4,4,1);(3,2,1)$
$(4,2,2)$	$(4,2,3);(1,2,2);(4,2,1);(4,3,2);(2,2,2);(4,1,2);(4,2,4);(4,4,2);(3,2,2)$
$(4,2,3)$	$(4,3,3);(1,2,3);(4,2,1);(4,1,3);(4,2,2);(4,2,4);(2,2,3);(4,4,3);(3,2,3)$
$(4,2,4)$	$(4,3,4);(1,2,4);(4,2,1);(4,1,4);(4,2,2);(4,2,3);(2,2,4);(4,4,4);(3,2,4)$
$(4,3,1)$	$(2,3,1);(1,3,1);(4,1,1);(4,3,3);(4,3,2);(4,2,1);(4,4,1);(4,3,4);(3,3,1)$
$(4,3,2)$	$(2,3,2);(1,3,2);(4,1,2);(4,3,3);(4,3,1);(4,2,2);(4,4,2);(4,3,4);(3,3,2)$
$(4,3,3)$	$(2,3,3);(1,3,3);(4,1,3);(4,3,1);(4,3,2);(4,2,3);(4,4,3);(4,3,4);(3,3,3)$
$(4,3,4)$	$(2,3,4);(1,3,4);(4,1,4);(4,3,1);(4,3,2);(4,2,4);(4,4,4);(4,3,3);(3,3,4)$
$(4,4,1)$	$(2,4,1);(1,4,1);(4,1,1);(4,3,1);(4,4,2);(4,2,1);(4,4,4);(4,4,3);(3,4,1)$
$(4,4,2)$	$(4,4,1);(1,4,2);(4,1,2);(4,3,2);(4,4,3);(4,2,2);(4,4,4);(2,4,2);(3,4,2)$
$(4,4,3)$	$(4,4,1);(1,4,3);(4,1,3);(4,3,3);(4,4,2);(4,2,3);(4,4,4);(2,4,3);(3,4,3)$
$(4,4,4)$	$(4,4,1);(1,4,4);(4,1,4);(4,4,2);(4,4,3);(4,2,4);(4,3,4);(2,4,4);(3,4,4)$

TABLE 3.5 – Les voisinages ouverts des sommets de $H(3,4)$

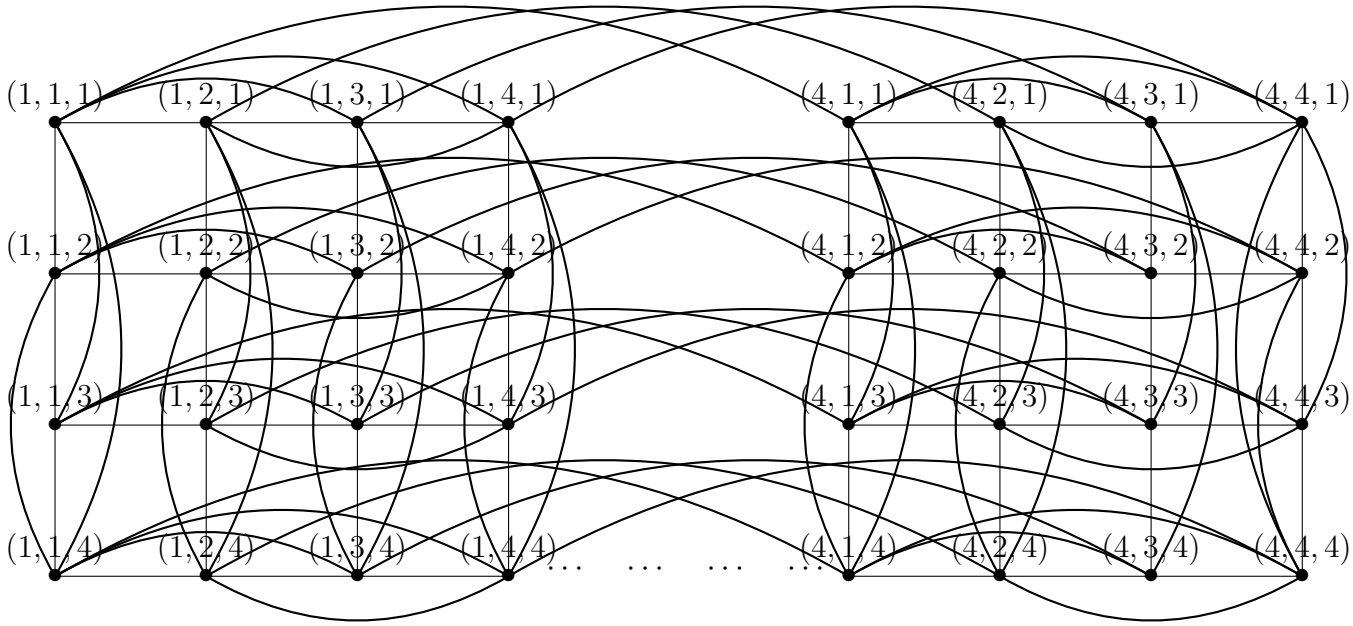


FIGURE 3.5 – Graphe $H(3,4)$

$*$ $H(3,4) = K_4 \times K_4 \times K_4$;

Proposition 19. *Le graphe $H(3,4)$ est un graphe 9-régulier et son nombre chromatique est égal á $\chi(H(3,4)) = 4$.*

Preuve.

- D'aprés le tableau précédent $\forall x \in V_H; d_{H(3,4)}(x) = 9$.
- On á un clique $\{(1,1,1);(1,1,2);(1,1,3);(1,1,4)\}$, alors $\chi(H) \geq 4$
- On partition de H en 4 stable : $\{\{(1,1,1);(1,2,4);(1,3,3);(1,4,2);(2,1,4);$
  $(2,2,3);(2,3,2);(2,4,1);(3,1,3);(3,2,2);(3,3,1);(3,4,4);(4,1,2);$
  $(4,2,1);(4,3,4);(4,4,3)\},\{(1,1,2);(1,2,1);(1,3,4);(1,4,3);(2,2,1);$
  $(2,2,4);(2,3,3);(2,4,2);(3,1,4);(3,2,3);(3,3,2);(3,4,1);(4,1,3);$
  $(4,2,2);(4,3,1);(4,4,4)\},\{(1,1,3);(1,2,2);(1,3,1);(1,4,4);(2,1,2);$
  $(2,2,1);(2,3,4);(2,4,3);(3,1,1);(3,2,4);(3,3,3);(3,4,2);(4,1,4);$
  $(4,2,3);(4,3,2);(4,4,1)\},\{(1,1,4);(1,2,3);(1,3,2);(1,4,1);(2,1,3);$
  $(2,2,2);(2,3,1);(2,4,4);(3,1,2);(3,2,1);(3,3,4);(3,4,3);(4,1,1);$
  $(4,2,4);(4,3,3);(4,4,2)\}\}$.

  Alors $\chi(H) \leq \alpha(H)$

  Donc on á $\chi(H) = 4$.

■

On peut démentrer d'un autre manière ce résultat suivant :

Preuve.

$S = \{1,2,3,4\}$, $V_{H(3,4)} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4);\ x_i \in S, i = 1 \ldots 4\}$

- On pose :

$$V_{x_1x_2x_3} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4);\ x_4 \in S\}$$

- $\{V_{x_1x_2x_3};\ x_i \in S, i = 1, 2, 3\}$ forment 4^2 partition de $V_{H(3,4)}$.

  $$V_{H(3,4)} = \cup_{x_1 \in S}(\cup_{x_2 \in S}(\cup_{x_3 \in S} V_{xy}))$$

- $\langle V_{x_1x_2x_3} \rangle$ est une clique de $H(3, 4)$

  Donc $\chi(\langle V_{x_1x_2x_3} \rangle) = 4$

  Par suite , $\chi(H(3, 4)) = \chi(\langle V_{x_1x_2x_3} \rangle) = 4$.

■

Proposition 20. *Le nombre chromatique de $H(d, q)$ est égal á $\chi(H(d, q)) = q$.*

Preuve.

$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$, $V_{H(d,q)} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_q);\ x_i \in S,\ i = 1, 2, \ldots, q\}$

- On pose :

  $$V_{x_1x_2\ \ldots\ x_{q-1}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}, x_q);\ x_q \in S\}$$

- $\{V_{x_1x_2\ \ldots\ x_{q-1}};\ x_i \in S, i = 1, 2, \ldots x_{q-1}\}$ forment q^{d-1} partition de $V_{H(d,q)}$.

  $$V_{H(d,q)} = \cup_{x_1 \in S}(\cup_{x_2 \in S} \ldots (\cup_{x_{q-1} \in S} V_{x_1x_2\ \ldots\ x_{q-1}}))$$

- $\left\langle V_{x_1x_2\ \ldots\ x_{q-1}} \right\rangle$ est une clique de $H(d, q)$

  Donc $\chi(\left\langle V_{x_1x_2\ \ldots\ x_{q-1}} \right\rangle) = q$

  Comme $\chi(\left\langle V_{x_1x_2\ \ldots\ x_{q-1}} \right\rangle) = q \Rightarrow \chi(H(d, q)) = q$.

■

3.2 (0, 2)-Graphe

Proposition 21. *Soit G un $(0, 2)$-graphe. Le nombre coloration de G est égal á :*

$$\chi(G) = \begin{cases} 2 & si \ \ |N_G\{u\} \cap N_G\{v\}| = 0. \\ 4 & si \ \ |N_G\{u\} \cap N_G\{v\}| = 2. \end{cases}$$

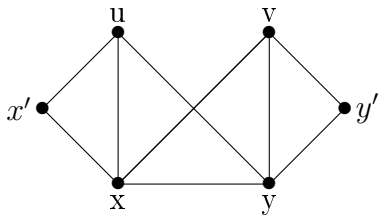
Preuve.Cas 1 : Si $N_G(u) \bigcap N_G(v) = \varnothing$

$|N_G(u) \bigcap N_G(v)| = 0$, pour tout $(u, v) \in V^2$ avec $uv \in E$

Donc G est un couplage contradiction avec G est connexe.

Cas 2 : Si $|N_G(u) \bigcap N_G(v)| = 2$.

$*$ **Sous-cas 1 :** Pour tout $(u, v) \in V^2$ avec $uv \notin E$



(G)

· $N_G\{u\} \cap N_G\{v\} = \{x, y\}$;

· $N_G\{x\} \cap N_G\{y\} = \{u, v\}$;

· $N_G\{u\} \cap N_G\{x\} = \{x', y\}$;

· $N_G\{y\} \cap N_G\{v\} = \{x, y'\}$;

· On á :

$$\begin{cases} x'v \in E \Rightarrow N_G\{u\} \cap N_G\{v\} = \{x, y, x'\}. \\ uy' \in E \Rightarrow N_G\{u\} \cap N_G\{v\} = \{x, y, y'\}. \end{cases} \Leftrightarrow contradiction \ \ (dfinition \ \ de \ \ (0,2) - graphe)$$

$$\begin{cases} xy' \in E \Rightarrow N_G\{x\} \cap N_G\{y\} = \{u, v, y'\}. \\ x'y \in E \Rightarrow N_G\{x\} \cap N_G\{y\} = \{u, v, x'\}. \end{cases} \Leftrightarrow contradiction \ \ (dfinition \ \ de \ \ (0,2) - graphe).$$

· $|N_G\{u\} \cap N_G\{x'\}| = 1 \Leftrightarrow$ contradiction avec l' hypothèse $|N_G(u) \bigcap N_G(v)| = 2$;

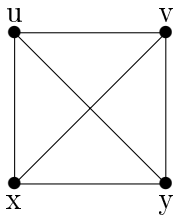
· $|N_G\{u\} \cap N_G\{y\}| = 1 \Leftrightarrow$ contradiction avec l' hypothèse $|N_G(u) \bigcap N_G(v)| = 2$;

· $|N_G\{v\} \cap N_G\{x\}| = 1 \Leftrightarrow$ contradiction avec l' hypothèse $|N_G(u) \bigcap N_G(v)| = 2$.

Donc, si $u \notin N_{G(v)}$, alors $x \notin N_{G(y)}$.

$*$ **Sous-cas 2 :** Pour $(u, v) \in V^2$ avec $uv \in E$

Alors on a un clique de 4 et le graphe G est complet k_4, donc $\chi(G) = 4$.



(G)

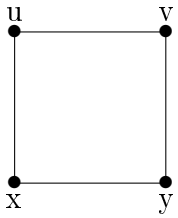
Cas 3 : Si $N_G(u) \bigcap N_G(v) = \varnothing$.

$\cdot$ Pour $(u, v) \in V^2$ avec $uv \in E$

Sans pronde de généralité, supposons que $\exists\ x \in N_G(u)$

Donc $N_G(u) \bigcap N_G(v) = \{x\} \Rightarrow \exists\ y \in N_G(v)$ donc $N_G(y) \bigcap N_G(u) = \{v\}$

Alors le graphe est biparti, donc $\chi(G) = 2$.



(G)

■

CONCLUSION

Conclusion

Tout au long de ce travail, notre attention s'est principalement portée sur l'étude des graphes de type hypercube, notamment les graphes de Hamming et les $(0, 2)$-graphes. Nous avons cherché à déterminer le nombre chromatique de ces graphes, constatant que cette détermination est généralement complexe pour certains types spécifiques de graphes de type hypercube. En perspective, notre objectif est d'approfondir l'étude de la coloration des graphes de type hypercube dans d'autres cadres graphiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alain Bretto, François Hennecart, Alain Faisant. Éléments de théorie des graphes. Springer-Verlag France, 2012.

[2] L.R. Alvarz. Undirected graphs as graphs of modular lattices. Canad.J. Math., 17 :923–932, 1965.

[3] A. Berrachedi, M. Mollard. Median graphs and hypercubes, some new characterizations. Discrete Mathematics, 208–209 :71–75, 1999.

[4] A. E. Brouwer, H. M. Mulder. The vertex connectivity of 0,2-graph equals its degree. Discrete Mathematics, 169(1) :153–155, 1997.

[5] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. Proc. Cambridge Phil. Soc., 37 :194–197, 1941.

[6] G. Burosh, I. Havel, J.M. Laborde. DM-Graphs and a new characterization of Hypercubes. Discrete Mathematics, to appear.

[7] D. Duffus, I. Rival. Graphs orientable as distributive lattices. Proc. Amer. Soc., 88 :197–200, 1983.

[8] Y. Egawa. Characterization of the cartesian product of complete graphs by convex subgraphs. Discrete Mathematics, 58 :307–309, 1986.

[9] S. Foldes. A Characterization of Hypercubes. Discrete Mathematics, 17 :155–159, 1977.

[10] I. Havel, J.M. Laborde. On Distance Monotone Graphs. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 52 :557–561, 1987.

[11] J.M. Laborde. Caractérisation locale du graphe du n-cube. In C. Benzaken (ed) : Actes du colloque algèbre appliquée et combinatoire, Grenoble, 198–200, 1978.

[12] J.M. Laborde, S.P. Rao Hebbare. Another characterization of hypercubes. Discrete Mathematics, 39 :161–166, 1982.

[13] L. Lovász. Three short proofs in graph theory. J. Combin.Th., Series B, 19 :269–271, 1975.

[14] Michel Mollard. Two Characterizations of generalized hypercube, LSD(IMAG) BP 68 38041 Grenoble CEDEX, France.

[15] M. Mollard. les invariants du n-cube. Thèse de magister, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG ; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1981.

[16] H.M. Mulder. Interval-regular graphs. Discrete Mathematics, 41 :253–269, 1982.

[17] H.M. Mulder. n-Cubes and Median Graphs. J. of Graph Theory, 4 :107–110, 1980.

[18] M. Mulder. $(0, \lambda)$ graphs and n-cubes. Discrete Mathematics, 28 :179–188, 1979.

[19] H.M. Mulder. The Interval Function of a Graph. Mathematical Centre Tracts 132, Amsterdam, 1980.

[20] L. Nebesky. Algebraic properties of Husimi trees. Casopis Pest. Math., 107 :116–123, 1982.

[21] J. Nieminen, M. Peltola, P. Ruotsalainen. Two characterizations of hypercubes. The Electronic journal of combinatorics, 2011.

[22] G. Ringel. Über drei kombinatorische Probleme am n-dimensionalen Würfel and Würfelgitter. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 20 :10–19, 1955.

[23] P. Vanden Cruyce. A Characterization of the n-Cube by Convex Subgraphs. Discrete Mathematics, 41 :109–110, 1982.

[24] Youcef Saad, Martin H. Schultz. Topological Properties of Hypercubes. Research Report YALEU/DCS/, RR-389, (1985) pp 2-6.H.