REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MEDEA

FACULTE DES SCIENCES



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de **Master**

En Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par :

BELLOUNI Siham
BOULARACHE Amina

Thème :

Résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension pour certains potentiels *PT*-symétriques par l'approche de la supersymétrie

Soutenue publiquement le : 20 /06 /2018. Devant le jury composé de :

L. DEKAR	Grade : MCA	Univ. Médéa	Président
K. BOUCHACHIA	Grade : MAA	Univ. Médéa	Examinateur
Z. KECHIDI	Grade : MCB	Univ. Médéa	Examinateur
N. ZAGHOU	Grade : MCB	Univ. Médéa	Encadreur

Année universitaire 2017/2018

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté un traitement précis par l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique de deux modèles quantiques dans le cadre de la mécanique quantique PT-symétrique. L'objectif principal de ce travail est de déterminer les états liés de deux potentiels PT-symétriques pour une particule non relativiste avec une masse constante.

Dans ce travail, nous avons déterminé le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés de l'équation de Schrödinger à une dimension pour une particule scalaire soumise à deux potentiel différents PT-symétriques, le premier est l'oscillateur harmonique plus un potentiel linéaire et l'autre est un potentiel moléculaire hyperbolique. Nous avons obtenu quelques résultats connus dans la littérature.

Mots clés: Supersymétrie, invariance de forme, équation de Schrödinger, potentiel PT-symétrique, spectre d'énergie, fonctions propre.

Abstract

In this dissertation, we have presented a precise treatment by using the supersymmetry quantum mechanics approach of two quantum models in the frame of PT-symmetric quantum mechanics. The main objective of this work is to determine the bound states of two PT-symmetric potentials for a non-relativistic particle with a constant mass.

In this work, we have determined the energy spectrum and the wave functions of the bound states of the one-dimensional Schrödinger equation for a scalar particle subjected to two different PT-symmetric potentials. The first is the harmonic oscillator plus a linear potential and the other is a molecular hyperbolic potential. We have obtained some results known in the literature are then found as particular cases.

Keywords: Supersymmetry, shape invariance, Schrödinger equation, PT-symmetric potential, Energy spectrum, eigenfunctions.

ملخص

في هذه الرسالة ، قمنا بمعالجة نموذجين كميين بتطبيق نهج التناظر الفائق و هذا في إطار الميكانيك الكمي صامد بالنسبة للزوجية و قلب الزمن (PT-symétrie) . و هدفنا الرئيسي من هذا العمل هو تحديد حالات الربط للكمونيين غير هرميتين و صامدة بالنسبة للزوجية و قلب الزمن لجسيمة غير نسبية ذات كتلة ثابتة.

في هذا العمل ، قمنا بتحديد الأطياف الطاقية ودوال موجة للكمونيين مختلفين صامدين بالنسبة للزوجية و قلب الزمن و هذا في إطار معادلة شرودنجر ذو بعد واحد. الكمون الأول هو عبارة عن هزاز توافقي زائد دالة خطية صامدة بالنسبة للزوجية و قلب الزمن و الثاني عبارة عن دالة جزيئية زائدية صامدة بالنسبة للزوجية و قلب الزمن .في الأخير تحصلنا على بعض النتائج المعروفة في الفيزياء النظرية كحالات خاصة.

الكلمات المفاتيح: التناظر الفائق، شكل صامد، معادلة شرودنجر ، كمون صامدة بالنسبة للزوجية و قلب الزمن ، قيم ذاتية، دوال ذاتية

Table des matières

Introduction **6**

1 Supersymétrie pour l'étude d'un potentiel à une dimension **11**

1.1 Factorisation d'un Hamiltonien quelconque 12

1.1.1 Relations entre les niveaux d'énergie et les fonctions propres correspondantes de deux Hamiltoniens partenaires 14

1.2 Hiérarchies d'Hamiltoniens 15

1.3 Invariance de forme 16

1.3.1 Définition 17

1.3.2 Formules générales 17

1.3.3 Forme de la fonction f 19

2 Approche de la supersymétrique en mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique **21**

2.1 Propriétés des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétriques 21

2.2 Approche de la supersymétrie pour les potentiels $\mathcal{PT}$-symétriques 23

3 Particule non relativiste soumise à un potentiel quadratique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique **27**

3.1 Spectre énergétique 28

3.2 Fonctions d'onde normalisées 31

3.3 Cas spécial 32

3.3.1 Exemple illustratif 33

4 Etats liés d'une particule non relativiste soumise à un potentiel moléculaire Hyperbolique, $\mathcal{PT}$-symétrique **36**

4.1 Détermination des valeurs propres 37

4.2 Détermination des fonctions propres normalisées 40

4.3 Quelques cas spéciaux 41

4.3.1 Premier cas : Potentiel de l'oscillateur harmonique 41

4.3.2 Deuxième cas : Potentiel de Pöschl-Teller 44

4.3.3 Troisième cas : Potentiel de l'oscillateur harmonique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique 46

Conclusion **48**

Bibliographie **49**

–

Remerciements

Ce travail a été fait à l'université de Médéa, Faculté des Sciences, Département de Sciences de la Matière. En premiers lien, nous remercions Dieu-Puissant de nous avoir donné la force et la volonté pour faire ce travail.

Tout d'abord, nous aimerions exprimer à M. N. ZAGHOU son acceptation de diriger ce travail malgré ses multiples responsabilités, ses bonnes intentions et ses conseils pratiques qui nous ont beaucoup inspirés.

Nous tenont à remercier sincèrement M. L. DEKAR, d'avoir présidé notre jury du mémoire, et M. K. BOUCHACHIA et M. Z. KCHIDI en tant que examinateurs. Se sont toujours montrés à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Nous voudrions exprimer nos remerciements à tous les enseignants de la physique de l'université de Médéa et spécialement D. L. DEKAR, ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué à développer ce travail.

BELLOUNI-BOULARACHE

Dedicace

Je dédie ce travail

À mon encouragent Père

À ma chère Mère pour sa patience

À ma soeur, ma princesse Nabila

À mes frères : Hassen, Redouane et Rafik

À toutes mes amies surtout mon diamant Samia qui ma poussé à travailler et qui m'a encouragé

Et spécialement à mon binôme de ce travail Siham

BOULARACHE Amina.

Dedicace

Je dédie ce travail

À mes chèrs parents, pour tous leurs sacrifices, leur amaur, leur soutien et leur prières tout au long de mes études

À mes chèrs frères, Adel, Rachid, Abd Alnour, pour leurs encouragements

À mes amis et à mon binôme Amina

Merci d'être toujours là pour moi.

BELLOUNI Sihem.

Introduction

La mécanique quantique est à la base des théories modernes décrivant les phénomènes physiques qui se manifestent à l'échelle atomique, où à trés basse température pour les systèmes constitués d'un très grand nombre de particules. Le point de départ est bien sûr la détermination du spectre énergétique de l'Hamiltonien qui décrit la dynamique du système en question. Pour cela, il faut passer par la résolution de l'équation de Schrödinger relative à cet Hamiltonien. Pour un système à n degrés de libertés, gouverné par un Hamiltonien H, cette équation s'écrit :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\Psi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; t\right) = H\Psi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; t\right). \tag{1}$$

Si l'opérateur Hamiltonien H ne dépend pas explicitement du temps, il est d'usage de mettre la fonction d'onde $\Psi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; t\right)$ sous la forme d'un produit d'une fonction de l'espace et d'une autre fonction du temps, $\Psi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; t\right) = \Phi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\Xi(t)$, de sorte que la résolution de cette équation se réduit à la résolution d'une équation aux valeurs propres pour la fonction Φ,

$$H\Phi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = E\Phi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right), \tag{2}$$

appelée aussi équation de Schördinger stationnaire.

Lorsque le système étudié ne subit pas l'effet d'un champ magnétique, l'Hamiltonien H est généralement composé d'une partie cinétique et d'un potentiel d'interaction. Dans le cas d'une seule particule placée dans un potentiel scalaire, l'Hamiltonien prend la forme

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{\Delta} + \upsilon\left(\mathbf{r}\right), \tag{3}$$

où $\mathbf{\Delta}$ désigne le Laplacien et $\upsilon\left(\mathbf{r}\right)$ est la fonction du potentiel.

Il existe plusieurs techniques en littérature pour résoudre l'équation de Schrödinger indépendant du temps dans le cas des problèmes à une dimension. Parmi ces techniques, la méthode

de factorisation, la méthode de Nikiforov-ouvarov, la méthode de semi-classique, l'intégrale de chemin,....etc. Ces méthodes ont été utilisées avec succès pour résoudre certains types de potentiels connus en physique et en chimie quantique.

Parallèlement à ces techniques, la méthode de factorisation est connue depuis les travaux de Schrödinger lui-même [1]. Elle a connu un développement notable dans les années quarante grâce aux travaux de Infeld et Hull [2]. Depuis quelques années il y a eu un regain d'intérêt pour cette technique [3] et notamment depuis l'introduction de la notion de l'invariance de forme d'un potentiel par Gendeshtein [4]. Cette méthode est maintenant connue sous le nom de méthode supersymétrique ou supersymétrie en mécanique quantique. Le point essentiel dans cette approche est l'obtention d'un potentiel supersymétrique, par la résolution d'une équation du type Riccati, à partir duquel on détermine la fonction propre de l'état fondamental, supposé d'énergie nulle. Les autres valeurs propres et fonctions propres du potentiel sont alors déterminées d'une manière simple et élégante. L'avantage de cette méthode est beaucoup plus sa simplicité par rapport aux autres approches. Cependant, elle demeure restrictive puisqu'elle s'applique uniquement pour les potentiels invariants de forme.

Dans les toutes dernières années, on a commencé à s'intéresser à l'élaboration d'une nouvelle théorie quantique qui pourrait s'appliquer aux potentiels non Hermitiens, mais invariants par la réflexion de l'espace $\mathcal{P}$ et le renversement du temps $\mathcal{T}$. Elle est parfois appelée mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique. On montre que si le potentiel est $\mathcal{PT}$-symétrique et que la symétrie n'est pas brisée, les valeurs propres de l'Hamiltonien sont réelles [5–9].

La différence entre la mécanique quantique non-Hermitien et Hermitien, réside dans l'orthogonalité des fonctions propres d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique. Pour ce faire, Bender [5] a introduit un produit scalaire dit "$\mathcal{PT}$-produit scalaire" associé aux Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques. Mais ce dernier s'est avéré insuffisant pour formuler une nouvelle théorie quantique valable, car la norme d'un état n'est pas nécessairement positive, d'où la probabilité de présence n'est pas définie positive et par conséquent il ne peut être physiquement acceptable.

Pour dépasser le problème des normes négatives des états, Bender a introduit une symètrie cachée dénoté par $\mathcal{C}$. Cette symétrie est appelée parfois opérateur de conjugaison de charge qui commutant avec l'Hamiltonien et qui transforme les fonctions de ce dernier dont les normes sont négatives en d'autres fonctions propres de normes positives. Le but de construire cet

opérateur possède un produit scalaire défini positif. Il a montré qu'en fait tout Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique possède une autre symétrie cachée, qui est la $\mathcal{CPT}$-symétrie [10]. Cette dernière permet de définir un produit scalaire où toutes les normes sont alors positives, ce produit scalaire est dénommé "$\mathcal{CPT}$ -produit scalaire".

Dans les toutes dernières années, quelques auteurs se sont récemment intéressé à l'élaboration d'une nouvelle théorie quantique qui pourrait s'appliquer aux potentiels non Hermitiens qui ont un grand intérêt de nos jours, puisqu'ils se retrouvent dans plusieurs branches de la physique, mais ces potentiels sont invariants par la réflexion de l'espace $\mathcal{P}$ et le renversement du temps $\mathcal{T}$, qui sont dits $\mathcal{PT}$-symétriques, et ils possédent les valeurs propres réelles. Par ailleurs, il existe plusieurs travaux publiées dans ce domaine dans le cadre de la mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique non relativiste parmi eux : une famille des potentiels singuliers [10], l'oscillateur de Morse [11], potentiel de Rosen-Morse I [12], potentiel de Rosen-Morse II [13,14], potentiel de Coulomb [14], poteniel de Eckart II [15], poteniel de Scarf II [14,16–21], potentiel de Pöschl-Teller généralisé [17], potentiels anharmoniques quartique et sextique [22],...etc. De plus, le concept des potentiels $\mathcal{PT}$-symétrique joue un rôle majeur dans de nombreuses applications de la physique, optique, ...etc.

Le travail de ce mémoire de Master s'articule sur la résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension sous l'influence de deux potentiel quantiques complexes $\mathcal{PT}$ -symétrique : potentiel quadratique et un potentiel moléculaire Hyperbolique dans le cadre de la mécanique quantique supersymétrique pour cela nous avons partagé notre travail en quatre chapitre ;

Premier chapitre est consacré à un rappel plus ou moins détaillé de la théorie de supersymétrie en mécanique quantique (SUSYQM), nous présentons les différentes étapes nécessaires de cette approche, menant au calcul des valeurs propres et les fonctions propres correspondantes d'un potentiel à une dimension satisfaisant à la propriété d'invariance de forme.

Deuxième chapitre est consacré à une brève présentation des propriétés générales de la mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique. Nous présentons aussi, les modifications nécessaires qu'il faut apporter à l'approche de la SUSYQM dans le cadre de la $\mathcal{PT}$-symétrie.

Troisième chapitre , est réservé à déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés de l'équation de Schrödinger à une dimension pour une particule scalaire soumise à

un potentiel de l'oscillateur harmonique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique en utilisant l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique.

Quatrième chapitre est consacré à la résolution exacte, par l'approche de la SUSYQM, de l'équation de Schrödinger à une dimension pour une particule non relativiste soumise à un potentiel moléculaire Hyperbolique $\mathcal{PT}$-symétrique. Nous obtenons exactement le spectre des niveaux d'énergie réel ainsi que les fonctions propres correspondentes sous forme explicite. Nous terminons ce travail par la discussion de certains cas spéciaux et la comparaison avec les résultats de littérature.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Supersymétrie pour l'étude d'un potentiel à une dimension

La supersymétrie ($SUSY$) combine les degrés de liberté bosonique et fermionique dans une description élégante en fonction de superchamps [3]. Autrement dit, la supersymétrie en physique est la description de la symétrie entre les bosons et les fermions, en ce sens que chaque fermion a un "superpartenaire" qui est un boson et vice versa.

Ce formalisme a vu le jour au début des années (1970) avec les travaux de $Nicolai$ [23] et $Witten$ [24] sur l'unification de la théorie de champs, dont les idées fondamentales ont stimulé de nouvelles approches dans d'autres branches de la physique, telles que la physique atomique, moléculaire, nucléaire, statistique et physique de la matière condensée et fondamntalement en mécanique quantique non relativiste. Dans cette dernière branche, la supersymétrie est une approche pour la résolution algébrique de l'équation de Schrödinger à une dimension pour les états liés d'une certaine classe de potentiels dits invariants de forme. Elle peut aussi, servir pour générer de nouveaux potentiels exactement solubles dont les spectres et les fonctions propres associées sont liés à ceux d'un potentiel de référence.

La supersymétrie est une méthode basée sur la factorisation de l'Hamiltonien H par l'introduction d'opérateurs d'entrelacements A et A^+ (Intertwining operator), ce formalisme repose entièrement sur la définition d'un superpotentiel. Ce dernier possède un grand intérêt dans la théorie de supersymétrique en mécanique quantique, puisqu'il permet de construire la fonction propre de l'état fondamental du potentiel physique et la détermination de son énergie

correspondante. Les énergies associées aux états excites peuvent ainsi être déterminées par la propriété de l'invariance de forme. Cependant, le concept d'invariance de forme a été introduit par Gendshtein [4] en 1983 dans la structure de la mécanique quantique supersymétrique pour déterminer les solutions exactes de l'équation de Schrödinger à une dimension d'une manière algébrique. En outre, les bases de la mécanique quantique supersymétrique "SUSYQM" se sont développées avec les travaux de Cooper [3], Junker [25] et Khare *et al* [26].

1.1 Factorisation d'un Hamiltonien quelconque

Soit l'Hamiltonien à une dimension d'une particule soumise à un potentiel $V(x)$, qui s'écrit

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x). \tag{1.1}$$

Les fonctions propres $\Psi_n(x)$ et les valeurs propres E_n des états liés associés à H, dans le cas non relativiste, sont les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire

$$H\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x), \tag{1.2}$$

avec la condtion de normalisabilité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left|\Psi_n(x)\right|^2 < \infty, \tag{1.3}$$

où le nombre quantique $n = 0, 1, 2, ...$ caractérise aussi le nombre de nœuds des fonctions propres.

On définit le potentiel décalé d'une quantité égale à l'énergie de l'état fondamantal E_0,

$$\upsilon^{(1)}(x) = V(x) - E_0 \tag{1.4}$$

Ainsi, l'Hamiltonien $H^{(1)}$ associé au potentiel $\upsilon^{(1)}(x)$ s'écrit

$$H^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + \upsilon^{(1)}(x), \tag{1.5}$$

où l'énergie de son état fondamental est nulle, $E_0^{(1)} = 0$ [25, 27] et la fonction d'onde correspondante satisfait l'équation

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \upsilon^{(1)}(x)\right)\Psi_0^{(1)}(x) = 0. \tag{1.6}$$

Sachant que $\Psi_0^{(1)}(x)$ tend vers zéro pour $x \to \pm\infty$ et ne posséde aucun noeud. A partir de l'équation (1.6), on trouve facilement une expression de $\upsilon^{(1)}(x)$

$$\upsilon^{(1)}(x) = \frac{1}{\Psi_0^{(1)}(x)} \frac{d^2\Psi_0^{(1)}(x)}{dx^2}. \tag{1.7}$$

Autrement dit, le potentiel $\upsilon^{(1)}(x)$ est complètement défini par la connaissance de la fonction propre du niveau fondamental et vice versa. En outre, mentionons que les fonctions propres de $H^{(1)}$ sont celles de H et les niveaux d'énergie sont translatés de E_0

$$\Psi_n^{(1)}(x) = \Psi_n(x) \text{ et } E_n^{(1)} = E_n - E_0. \tag{1.8}$$

l'Hamiltonien $H^{(1)}$ peut être obtenu par factorisation. Il peut en effet s'écrire sous la forme

$$H^{(1)} = A^+ A, \tag{1.9}$$

où les opérateurs A et A^+, qui doivent être adjoint l'un de l'autre pour assurer l'hermiticité de $H^{(1)}$, sont définis par

$$A = \frac{d}{dx} + W(x) \text{ et } A^+ = -\frac{d}{dx} + W(x). \tag{1.10}$$

On peut écrire le potentiel sous la forme

$$\upsilon^{(1)}(x) = W^2(x) - \frac{dW(x)}{dx}, \tag{1.11}$$

cette équation est une équation non linéaire du type Riccati, et la $W(x)$ est une fonction réelle connu sous le nom de " superpotentiel". Sachant que $E_n^{(1)}$ est les valeurs propres de $H^{(1)}$ avec $E_n^{(1)} > 0$ pour $n = 0, 1, 2, ...$

Si le spectre d'énegie de l'état fondamental ($n = 0$) de $H^{(1)}$ est nul ($E_0^{(1)} = 0$), on a

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - W'(x)\right) \psi_0^{(1)}(x) = 0, \tag{1.12}$$

qui donne le superpotentiel sous la forme

$$W(x) = -\frac{d}{dx}\left(\ln \Psi_0^{(1)}(x)\right), \tag{1.13}$$

qui s'intègre pour donner la fonction propre de l'état fondamental de $H^{(1)}$ sous la forme

$$\Psi_0^{(1)}(x) \sim \exp\left(-\int^x W(y)\, dy\right). \tag{1.14}$$

Si $\Psi_0^{(1)}(x)$ est normalisable, on dit que la supersymétrie est non brisée et aussi cette fonction est s'annule à l'extrémités de l'intervalle de définition de potentiel.

On va maintenant définir l'Hamiltonien $H^{(2)}$ sous la forme

$$H^{(2)} = AA^{+}, \tag{1.15}$$

qui s'écrira en fonction du superpotentiel sous la forme

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + \frac{dW(x)}{dx} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + \upsilon^{(2)}(x), \end{aligned} \tag{1.16}$$

de sorte que

$$\upsilon^{(2)}(x) = W^2(x) + \frac{dW(x)}{dx}. \tag{1.17}$$

Sachant que $E_n^{(2)}$ est les valeurs propres de $H^{(2)}$ avec $E_n^{(2)} > 0$ pour $n = 0, 1, 2, ...$ En effet, le nouveau potentiel $\upsilon^{(2)}(x)$ et le premier potentiel $\upsilon^{(1)}(x)$ sont liés au même superpotentiel

$$\upsilon^{(2)}(x) - \upsilon^{(1)}(x) = H^{(2)} - H^{(1)} = \left[A, A^{+}\right] = 2W'(x), \tag{1.18}$$

ces deux potentiels $\upsilon^{(1)}(x)$ et $\upsilon^{(2)}(x)$ sont appelés "les potentiels supersymétriques partenaires"

1.1.1 Relations entre les niveaux d'énergie et les fonctions propres correspondantes de deux Hamiltoniens partenaires

L'équation de Schrödinger des partenaires $H^{(1)}$ et $H^{(2)}$ s'écrit

$$H^{(1)}\Psi_n^{(1)}(x) = A^{+}A\Psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}\Psi_n^{(1)}(x), \tag{1.19}$$

$$H^{(2)}\Psi_n^{(2)}(x) = AA^{+}\Psi_n^{(2)}(x) = E_n^{(2)}\Psi_n^{(2)}(x), \tag{1.20}$$

on a également

$$\begin{aligned} H^{(1)}\left(A^{+}\Psi_n^{(2)}(x)\right) &= A^{+}AA^{+}\Psi_n^{(2)}(x) \\ &= A^{+}H^{(2)}\Psi_n^{(2)}(x) \\ &= E_n^{(2)}\left(A^{+}\Psi_n^{(2)}(x)\right), \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} H^{(2)}\left(A\Psi_n^{(1)}(x)\right) &= AA^{+}A\Psi_n^{(1)}(x) \\ &= AH^{(1)}\Psi_n^{(1)}(x) \\ &= E_n^{(1)}\left(A\Psi_n^{(1)}(x)\right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

A partir ces relations, on trouve que les valeurs propres et les fonctions propres des Hamiltoniens $H^{(1)}$ et $H^{(2)}$ sont reliées par

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \;\; E_0^{(1)} = 0, \tag{1.23}$$

et

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x) \sim A^{+}\Psi_n^{(2)}(x) \;\text{ et }\; \Psi_n^{(2)}(x) \sim A\Psi_{n+1}^{(1)}(x). \tag{1.24}$$

La relation (1.23) nous montrent que les niveaux d'énergie de $H^{(1)}$ et $H^{(2)}$ sont coïncident à l'exception de l'état fondamental (pour $n = 0$) de l'Hamiltonien principal $H^{(1)}$ de telle sorte que le spectre d'énergie est égal à zéro, i.e., $E_0^{(1)} = 0$. Et aussi, la relation (1.24) nous montrent que si l'on connaît toutes les fonctions propres de $H^{(1)}$, on peut déterminer celles de $H^{(2)}$ et vice versa, par application répétée de A ou A^{+}. A chaque étape, la fonction propre obtenue est de carré sommable avec la même valeur propre.

1.2 Hiérarchies d'Hamiltoniens

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il est possible de déterminer $H^{(2)}$ à partir $H^{(1)}$ (Voir les Eqs. (1.9), (1.11), (1.15) (1.16) et (1.17)). Nous pouvons ensuite refactoriser $H^{(2)}$ pour obtenir son partenaire $H^{(3)}$, puis refactoriser $H^{(3)}$ pour définir $H^{(4)}$, et ainsi de suite. Dans le classement des Hamiltoniens $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, $H^{(4)}$, ..., chaque nouvel Hamiltonien a un état lié de moins que le précédent. Alors, de façon générale, si l'Hamiltonien de départ $H^{(1)}$ possède p états liés, on peut poursuivre cette procédure dans le cadre de la supersymétrie est non brisée jusqu'à un ordre p et construire une hiérarchie de $p-1$ partenaires $H^{(m)}$ (où $m = 2, 3, \cdots, .p$) à partir de l'Hamiltonien de départ $H^{(1)}$. Chaque Hamiltonien $H^{(m)}$ possède $(p-m+1)$ états liés de valeurs propres $E_n^{(1)}$ et de fonctions propres $\Psi_n^{(1)}$ avec $0 \leq n \leq p-1$. Autrement dit, $H^{(m)}$ ne possède pas les $(m-1)$ premières valeurs propres de $H^{(1)}$. En revanche, si la symétrie se brise à une étape quelconque de la construction de cette hiérarchie, on ne peut pas aller plus

loin et on doit s'arreter à ce niveau. Ainsi, l'Hamiltonien correspondant $H^{(m)}$ sera donné par

$$H^{(m)}(x) = A_{m-1}A_{m-1}^{+} + E_0^{(m-1)} = A_m^{+}A_m + E_0^{(m)} = -\frac{d^2}{dx^2} + \upsilon^{(m)}(x), \tag{1.25}$$

où

$$A_m = -\frac{d}{dx} + W_m(x) \text{ et } A_m^{+} = -\frac{d}{dx} + W_m(x), \tag{1.26}$$

avec

$$W_m(x) = -\frac{1}{\Psi_0^{(m)}(x)}\frac{d\Psi_0^{(m)}(x)}{dx} = -\frac{d\ln\Psi_0^{(m)}(x)}{dx}. \tag{1.27}$$

La forme de $\upsilon^{(m)}(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\upsilon^{(m)}(x) &= \upsilon^{(m-1)}(x) - 2\frac{d^2\ln\Psi_0^{(m-1)}(x)}{dx^2} \\ &= \upsilon^{(1)}(x) - 2\frac{d^2\ln\left(\Psi_0^{(1)}(x)\cdots\Psi_0^{(m-1)}(x)\right)}{dx^2}; m = 2,3,...p.\end{aligned} \tag{1.28}$$

On a aussi

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \cdots = E_{n+m-1}^{(1)}; \begin{cases} n = 0,1,2,...p-m+1 \\ m = 2,3,...p \end{cases}, \tag{1.29}$$

et

$$\Psi_n^{(m)}(x) \sim A_m\cdots A_2A_1\Psi_{n+m-1}^{(1)}(x), \ m \geq 2, \tag{1.30}$$

La relation inverse de cette équation est donnée par

$$\Psi_{n+m-1}^{(1)}(x) \sim A_1^{+}A_2^{+}\cdots A_m^{+}\Psi_n^{(m)}(x), \tag{1.31}$$

Connaissant toutes les valeurs propres et les fonctions propres de l'Hamiltonien $H^{(1)}$, ces équations nous permettent de déterminer immédiatement toutes les valeurs propres et les fonctions propres de la hiérarchie des différents Hamiltoniens $H^{(m)}$.

1.3 Invariance de forme

En utilisant la condition d'invariance de forme et les équations du paragraphe "Hiérarchies d'Hamiltoniens" ci-dessus, on peut obtenir les valeurs propres et fonctions propres d'un potentiel invariant de forme. Parmi ces potentiels très connus analytiquement solubles : oscillateur harmonique, potentiel de Coulomb, potentiel de Rosen-Morse, Potentiel de Pöchl-teller...etc.

1.3.1 Définition

Nous considérons les potentiels partenaires supersymétriques $v^{(1)}(x)$ et $v^{(2)}(x)$ sont définis par

$$v^{(1)}(x,a_1) = W^2(x,a_1) - \frac{dW(x,a_1)}{dx}, \tag{1.32}$$

et

$$v^{(2)}(x,a_1) = W^2(x,a_1) + \frac{dW(x,a_1)}{dx}. \tag{1.33}$$

où a_1 est un ensemble de paramétres réels. Ces potentiels ont la même forme et s'ils ne diffèrent que par certains paramètres, on suppose de plus qu'ils obéissent à la condition d'invariance de forme [4]

$$v^{(2)}(x,a_1) = v^{(1)}(x,a_2) + R(a_1) \tag{1.34}$$

où a_2 est un nouveau ensemble de paramètres, reliés aux anciens par une certaine fonction

$$a_2 = f(a_1), \tag{1.35}$$

où le reste $R(a_1)$ est une fonction indépendante de x. Ainsi, on dit que les potentiels $v^{(1)}(x)$ et $v^{(2)}(x)$ sont invariants de forme.

1.3.2 Formules générales

On va montrer que le spectre entier de $H^{(1)}$ peut être obtenu algébriquement en utilisant (1.34). Pour cela, on va commencer par construire une série d'Hamiltoniens $H^{(s)}$ $(s = 2, 3, ...)$, en n'oubliant pas que si $H^{(1)}$ a p états liés. On peut construire p Hamiltoniens $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, ..., $H^{(p)}$, et que le $n^{iéme}$ Hamiltonien $H^{(n)}$ a le même spectre d'énergie que $H^{(1)}$ (les $(n-1)$ premiers niveaux d'énergie de $H^{(1)}$ ne faisant cependant pas partie de ceux de $H^{(n)}$). Par application répétée de la condition d'invariance de forme (1.34) et la relation (1.25), on voit qu'on peut écrire $H^{(s)}$ sous la forme

$$H^{(s)}(a_1) = -\frac{d^2}{dx^2} + v^{(s)}(x,a_1) \text{ et } H^{(s-1)}(a_1) = -\frac{d^2}{dx^2} + v^{(s-1)}(x,a_1), \tag{1.36}$$

avec

$$v^{(s)}(x,a_1) = v^{(s-1)}(x,a_2) + R(a_1). \tag{1.37}$$

On obtient ainsi une récurrence de la forme

$$\begin{aligned} \upsilon^{(2)}(x,a_1) &= \upsilon^{(1)}(x,a_2)+R(a_1) \\ \upsilon^{(3)}(x,a_1) &= \upsilon^{(2)}(x,a_2)+R(a_1) \\ &= \upsilon^{(1)}(x,a_3)+R(a_2)+R(a_1) \\ &\vdots \\ \upsilon^{(s)}(x,a_1) &= \upsilon^{(1)}(x,a_s)+\sum_{k=1}^{s-1}R(a_k). \end{aligned} \tag{1.38}$$

avec

$$a_s=\underbrace{f\circ f\circ .....\circ f}_{(s-1)\ fois}(a_1);\ s=2,3,... \tag{1.39}$$

Ainsi, ces Hamiltoniens successifs ont la même forme et s'ils ne diffèrent que par une constante additive et par la valeur des paramètres. Ils ont mêmes fonctions propres aux valeurs des paramètres près

$$\Psi_n^{(s)}(x,a_1)=\Psi_n^{(s-1)}(x,a_2). \tag{1.40}$$

et leurs valeurs propres sont données par

$$E_n^{(s)}(a_1)=E_n^{(1)}(a_s)+\sum_{k=1}^{s-1}R(a_k). \tag{1.41}$$

D'autre part, on peut généraliser la relation (1.38) sous la forme suivante

$$E_n^{(s)}(a_1)=E_n^{(s-1)}(a_2)+R(a_1), \tag{1.42}$$

De (1.23), on a

$$E_n^{(s)}(a_1)=E_{n+1}^{(s-1)}(a_1)=...=E_{n+s-1}^{(1)}(a_1). \tag{1.43}$$

A partir de (1.41) et (1.43) et en posant $n=0$, on obtient toutes les valeurs propres des états excités de l'Hamiltonien $H^{(1)}$ sous la forme suivante

$$E_0^{(s)}(a_1)=\sum_{k=1}^{s-1}R(a_k). \tag{1.44}$$

D'aprés (1.24), les fonctions propres correspondantes dans le cas général sont données sous la forme

$$\Psi_s^{(1)}(x,a_1)\sim\prod_{k=1}^{s-1}A^{+}(a_k)\,\Psi_0^{(1)}(x,a_{s+1}). \tag{1.45}$$

Sachant que $E_0^{(1)} = 0$ et de la même manière précédente, on peut passer de $H^{(s)}$ à $H^{(s-1)}$, puis $H^{(s-1)}$ à $H^{(s-2)}$ et ainsi de suite jusqu'à $H^{(2)}$ à $H^{(1)}$, et dont le $n^{\text{ième}}$ niveau coincide avec celui de l'état fondamental de l'Hamiltonien $H^{(n)}$. Par conséquent, le spectre complet des valeurs propres de $H^{(1)}$ est donné par

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^{n-1} R(a_k)\,;\; E_0^{(1)}(a_1) = 0, \tag{1.46}$$

et leurs fonctions propres sont obtenus d'après (1.45)

$$\Psi_n^{(1)}(x, a_1) \sim \prod_{k=1}^{n-1} A^+(a_k)\, \Psi_0^{(1)}(x, a_{n+1})\,. \tag{1.47}$$

1.3.3 Forme de la fonction f

La fonction f est une fonction responsable de la classification des solutions à la condition d'invariance de forme. Le problème de la classification de ces solutions est d'une importante considérable : une fois qu'on dispose d'une telle classification, on peut découvrir de nouveaux potentiels invariants de forme, solubles par des méthodes purement algébriques.

Dans notre travail, nous allons utiliser deux classes de solutions ont été découvertes [26] pour tous les potentiels sont invariants de forme et qui admettent des solutions avec l'approche de la mécanique quantique supersymétrique. Dans la première, les paramètres anciens a_1 et les paramètres nouveaux a_2 de ces potentiels sont reliés par une relation de translation,

$$a_2 = f(a_1) = a_1 + \alpha, \tag{1.48}$$

et pour n état lie, on a

$$a_n = f^n(a_1) = \underbrace{f \circ f \circ .... \circ f(a_1)}_{(n-1)\text{ fois}} = a_1 + n\alpha, \tag{1.49}$$

où α est un paramètre fixe. Dans la seconde, les paramètres a_1 et a_2 sont reliés par un facteur d'échelle,

$$a_2 = f(a_1) = qa_1, \text{ avec } 0 < q < 1, \tag{1.50}$$

et pour n état lie, on a

$$a_{n+1} = f^n(a_1) = \underbrace{f \circ f \circ .... \circ f(a_0)}_{n\text{ fois}} = q^n a_1. \tag{1.51}$$

Dans le cas particulier, $q = 1$, on a

$$a_2 = f(a_1) = a_1 \ , \tag{1.52}$$

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1. \tag{1.53}$$

Nous avons obtenu dans ce chapitre que la méthode de supersymétrie est basée sur la factorisation de l'Hamiltonien H, et nous allons traiter dans le chapitre suivant la théorie de $\mathcal{PT}$-symétrique.

Chapitre 2

Approche de la supersymétrique en mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique

Il est connu en algèbre que si un opérateur est Hermtien, ses valeurs propres sont toutes réelles et les fonctions propres correspndantes forment une base orthogonale. En revanche, s'il est non Hermtien alors ses valeurs propres ne sont pas garanties d'être réelles. Ses valeurs propres sont en général complexes. En mécanique quantique, l'Hamiltonien d'un système physique, qui est responsable de sa dynamique, est considéré comme un opérateur définit sur un espace de Hilbert et de plus Hermtien par rapport à cet espace.

Ainsi, un Hamiltonien Hermtien conduit automatiquement à une évolution unitaire de la fonction d'onde du système associé, ce qui est compatible avec son interprétation probabiliste. Pour ces raisons, l'hermiticité de l'Hamiltonien et de toutes les observables physiques, était toujous vue comme une condition nécessaire en mécanique quantique pour l'obtention de résultats physiques. Depuis quelques temps, on voudraient remettre en question cette hypothèse fondamentale de la mécanique quantique en voulant construire une nouvelle théorie quantique pour des Hamiltoniens qui ne sont pas nécessairement Hermtiens.

2.1 Propriétés des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétriques

La théorie quantique $\mathcal{PT}$-symétrique, qui est une formulation alternative à la théorie quantique conventionnelle, a été principalement développée par Bender et ses collaborateurs dans

une série d'articles depuis 1988 [5–9]. L'idée centrale de la théorie quantique $\mathcal{PT}$-symétrique, est de remplacer l'Hermiticité par la symétrie de réflexion d'espace-temps (symétrie $\mathcal{PT}$) sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique.

On dit que l'Hamiltonien H est $\mathcal{PT}$ -symétrique, i.e,. il invariant par l'opération composée $\mathcal{PT}$, s'il satisfait la relation suivante [5, 6, 9, 29]

$$(\mathcal{PT})\, H\, (\mathcal{PT})^{-1} = H \tag{2.1}$$

où le symbole $\mathcal{P}$ est un opérateur linéaire appelé opérateur de parité (ou réflexion d'espace) et $\mathcal{T}$ est l'opérateur d'inversion du temps dont leurs actions sur les opérateurs position $\hat{x}$ et impulsion $\hat{p}$ sont données respectivement comme

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} = -\,\hat{x} \text{ et } \mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P} = -\,\hat{p}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = \hat{x},\ \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\,\hat{p},\ \mathcal{T}i\mathcal{T} = -\,i, \tag{2.3}$$

où i est un nombre imaginaire ($i^2 = -1$). Autrement dit, si un Hamiltonein H est $\mathcal{PT}$ -symétrique, il commute avec l'opérateur produit $\mathcal{PT}$,

$$[H, \mathcal{PT}] = 0. \tag{2.4}$$

Il est bien connu que la réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$ symétique est une conséquence de la non birisure de la symétrie $\mathcal{PT}$, qui signifie que les fonctions propres de H sont simultanément fonctions propres de $\mathcal{PT}$. En fait, même si H et PT commutent, d'après la relation (2.4), on ne peut pas d'affirmer qu'ils possèdent les mêmes fonctions propres, comme c'est le cas en mécanique quantique. La raison est que $\mathcal{PT}$ n'est pas un opérateur linéaire mais anti-linéaire [10, 32], ce qui ne garantie pas l'existence d'un ensemble de fonctions propres communes.

Ainsi, pour construire une théorie quantique à partir des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques, nous exigeons de plus que la symétrie ne soit pas brisée. Il faut noter cependant que cette condition n'est pas triviale car il n'existe aucun moyen pour affirmer à priori qu'une telle symétrie d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est brisée ou pas. Il faut tout d'abord déterminer les fonctions propres pour en tirer une conclusion. Avec cette condition suplémentaire, on peut démontrer la réalité des valeurs propres d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$ symétrique.

En effet, soit donc $\{\Phi_n(x)\}$,pour $n = 1, 2, \cdots$, l'ensemble des fonctions propres communes à H et $\mathcal{PT}$, on a

$$H\Phi_n(x) = E_n\Phi_n(x) \ , \tag{2.5}$$

$$\mathcal{PT}\Phi_n(x) = \lambda_n\Phi_n(x) , \tag{2.6}$$

avec E_n et λ_n les valeurs propres correspondantes, qui sont à priori complexes. Cependant, puisque $(\mathcal{PT})^2 = 1$, il résulte que $|\lambda_n|^2 = 1$ pour toutes les valeurs de n possibles. Ainsi λ_n est une phase qui peut être absorbée dans la fonction propre $\Phi_n(x)$ de sorte que, sans perte de généralité, on peut prendre $\lambda_n = 1$ et écrire

$$\mathcal{PT}\Phi_n(x) = \Phi_n(x) . \tag{2.7}$$

Par ailleurs, en appliquant $\mathcal{PT}$ à gauche sur les deux membres de (2.5) et tenant compte de (2.4) et (2.7), on obtient

$$H\Phi_n(x) = E_n^*\Phi_n(x) . \tag{2.8}$$

Cette dernière relation, combinée avec (2.6), entraine que les valeurs propres sont réelles.

$$E_n = E_n^*.$$

En effet, dans le cadre de la symétrie $\mathcal{PT}$ est non brisée, la condition de normalisation dans le nouveau espace de Hilbert [28, 29], se donne

$$\int [\mathcal{PT}\Phi_n(x)]\,\Phi_n(x)\,dx = \int |\Phi_n(x)|^2\,dx = (-1)^n . \tag{2.9}$$

2.2 Approche de la supersymétrie pour les potentiels $\mathcal{PT}$-symétriques

Dans le cadre du formalisme de SUSYQM pour les Hamiltoniens hermitiens [3], les valeurs et les fonctions propres correspondantes d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique H, qui posséde la symétrie non brisée (avec des valeurs propres réelles), peuvent être obtenus de la même manière exposée dans le premier chapitre. Les Hamiltoniens partenaires $H^{(-)}$ et $H^{(+)}$ sont associées avec H par la relation suivante

$$H^{(-)} = H - E_0 = BA, \tag{2.10}$$

$$H^{(+)} = AB, \tag{2.11}$$

où E_0 est l'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien H, avec

$$A = \frac{d}{dx} + W(x), \qquad B = -\frac{d}{dx} + W(x), \tag{2.12}$$

et le superpotentiel $W(x)$ est une fonction complexe. Dans le cadre des systèmes non-hermitiens, l'opérateur $B \neq A^+$ (où A^+ est l'adjoint de A), ce qui signifie que A et B sont mutuellement pseudo-adjoints. Par conséquent, le superpotentiel $W(x)$ est anti-$\mathcal{PT}$-symétrique

$$W^*(-x) = -W(x), \tag{2.13}$$

Ceci conduit à que les deux opérateurs A et B sont anti-$\mathcal{PT}$-symétriques,

$$(\mathcal{PT})\, A\, (\mathcal{PT})^{-1} = -A, \tag{2.14}$$

$$(\mathcal{PT})\, B\, (\mathcal{PT})^{-1} = -B. \tag{2.15}$$

Par conséquent, d'après (2.10), les Hamiltonien H et $H^{(-)}$ ont les mêmes fonctions propres $\left(\psi_n(x) \equiv \psi_n^{(-)}(x)\right)$ et le spectre d'énergie $\left\{E_n^{(-)} = E_n - E_0\right\}$ correspondant à $H^{(-)}$ est défini semi-positif :

$$\begin{aligned} H^{(-)}\psi_n^{(-)}(x) &= BA\psi_n^{(-)}(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}W'(x)\right)\psi_n^{(-)}(x) \\ &= E_n^{(-)}\psi_n^{(-)}(x)\,; \text{ où } E_n^{(-)} \geq 0 \text{ pour } n = 0, 1, 2, \cdots . \end{aligned} \tag{2.16}$$

On suppose que le spectre d'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien de départ $H^{(-)}$ est nulle $E_0^{(-)} = 0$ (i.e., $A\psi_0^{(-)}(x) = 0$) dans le cas de la supersymétrie est non brisée. Ainsi, pour $n = 0$, l'équation (2.16) devient

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - W'(x)\right)\psi_0^{(-)}(x) = 0. \tag{2.17}$$

D'aprés le reangement des termes, l'équation (2.17) devient

$$\frac{\psi"_0^{(-)}(x)}{\psi_0^{(-)}(x)} = W^2(x) - W'(x), \tag{2.18}$$

qu'on peut écrire convenablement sous la forme

$$W^2(x) - W'(x) = \left(\frac{\psi_0'^{(-)}(x)}{\psi_0^{(-)}(x)}\right)^2 + \left(\frac{\psi_0'^{(-)}(x)}{\psi_0^{(-)}(x)}\right)', \tag{2.19}$$

la solution de cette équation par rapport l'inconnu $W(x)$ est donnée par

$$W(x) = -\frac{\psi_0'^{(-)}(x)}{\psi_0^{(-)}(x)} = -\frac{d}{dx}\ln\psi_0^{(-)}(x). \tag{2.20}$$

En intégrant la dernière équation, on obtient la fonction propre non normalisée de l'état fondamental de $H^{(-)}$ sous la forme

$$\psi_0(x) \equiv \psi_0^{(-)}(x) \sim \exp\left(-\int^x W(y)dy\right). \tag{2.21}$$

Par conséquent, la fonction d'onde de l'état fondamental $\psi_0(x)$ est une fonction $\mathcal{PT}$-symétrique

$$(\mathcal{PT})\,\psi_0(x)\,(\mathcal{PT})^{-1} = \psi_0^*(-x) = \psi_0(x), \tag{2.22}$$

L'action de l'opérateur A sur les deux côtés de l'équation (2.16) conduit à

$$H^{(+)}\left(A\psi_n^{(-)}(x)\right) = E_n^{(-)}\left(A\psi_n^{(-)}(x)\right), \tag{2.23}$$

telle que les valeurs propres $E_n^{(+)}$ de l'Hamiltonien partenaire $H^{(+)}$ et les fonctions propres normalisables correspondantes $\psi_n^{(+)}(x)$ pour $n = 0, 1, 2, ...$, sont liées à celles de $H^{(-)}$ par les relations suivantes

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)}, \tag{2.24}$$

et

$$\Psi_n^{(+)}(x) = A\Psi_{n+1}^{(-)}(x). \tag{2.25}$$

Explicitement, les Hamiltoniens partenaires s'écrivent

$$H^{(\mp)} = \frac{d^2}{dx^2} + V^{(\mp)}(x), \tag{2.26}$$

où les potnetiels partenaires sont donnés par

$$V^{(\mp)}(x;\{a_1\}) = W^2(x;\{a_1\}) \mp \frac{dW(x;\{a_1\})}{dx}. \tag{2.27}$$

où $\{a_1\}$ est un ensemble de paramètres réels. Ces potentiels sont dits invariants de forme si ils satisfont [4]

$$V^{(+)}(x;\{a_1\}) = V^{(-)}(x;\{a_2\}) + R(\{a_1\}) \tag{2.28}$$

où $\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ sont deux ensembles de paramètres réels liés par une certaine fonction ($\{a_2\} = f(\{a_1\})$) et le reste $R(\{a_1\})$ est une fonction independente de x.

Si la condition (2.28) est verifié, on peut démontrer que le spectre d'énergie de $H^{(-)}$ se donné algébriquement par la relation suivante [3]

$$E_0^{(-)} = 0 \ , \quad E_n^{(-)} = \sum_{k=1}^{n} R\left(\{a_k\}\right) \text{ pour } n = 1, 2, \cdots , \tag{2.29}$$

avec $\{a_k\} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}} (\{a_0\})$.

Ainsi, le spectre d'énergie de l'Hamiltonien H est donné par

$$E_n = E_n^{(-)} + E_0 = \sum_{k=1}^{n} R\left(\{a_k\}\right) + E_0. \tag{2.30}$$

les fonctions propres des états excités correspondantes sont données par la relation de récurrence (Voir la référence [3, 30–32])

$$\psi_n\left(x; \{a_1\}\right) = B\left(\{a_1\}\right) \psi_{n-1}\left(x; \{a_2\}\right). \tag{2.31}$$

Pour plus de simplicité, les fonctions propres $\psi_n\left(x; \{a_0\}\right)$ peut être obtenue par l'application répétée des opérateurs $B\left(\{a_i\}\right)$

$$\psi_n\left(x; \{a_1\}\right) = N_n \left[\prod_{i=1}^{n} B\left(\{a_i\}\right)\right] \psi_0\left(x, \{a_n\}\right) \text{ pour } n \geq 1. \tag{2.32}$$

ces fonctions sont $\mathcal{PT}$-symétriques, i.e,. $\psi_n^*(-x, \{a_1\}) = \psi_n(x, \{a_1\})$.

Nous avons obtenu dans ce chapitre que la théorie de $\mathcal{PT}$-symétrique est traitée des Hamiltoniens qui ne sont pas nécessairement Hermitiens, nous allons traiter dans le chapitre suivant particule non relativiste soumise à un potentiel quadratique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique.

Chapitre 3

Particule non relativiste soumise à un potentiel quadratique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique

Considérons le problème à une dimension d'une particule non relativiste de masse μ soumise à l'action du potentiel non hermitien mais $\mathcal{PT}$-symétrique suivant [32] :

$$V(x) = V^*(-x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 + i\eta x, \tag{3.1}$$

où ω et η sont des paramètres réels et positifs. Ce potentiel est la superposition d'un potentiel quadratique qui est à la fois Hermitien et $\mathcal{PT}$-symétrique et d'une partie linéaire, $\mathcal{PT}$-symétrique seulement. En l'absence du potentiel non Hermitien, c'est-à-dire pour $\eta = 0$, le problème se réduit à celui d'un oscillateur harmonique à une dimension dont la solution est bien connue. Par ailleurs, si η est imaginaire pur, i.e. $\eta \to \pm i\eta$, on obtient la version Hermitienne du potentiel. Notre but est alors d'étudier l'effet de la complexification sur la structure du spectre et des fonctions d'onde correspondantes de cet oscillateur harmonique, tout en s'assurant des résultats généraux que nous avons décrits dans le chapitre 2.

L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 + i\eta x\right\}\Phi(x) = E\Phi(x), \tag{3.2}$$

où E est l'énergie de la particule et $\Phi(x)$ la fonction d'onde correspondante, et $\hbar$ est la constante de Planck devisé sur 2π.

Effectuant le changement de varaible

$$y = \frac{\mu\omega}{\hbar}\left(x + i\frac{\eta}{\omega^2}\right) \text{ et } \Phi_n(x) \equiv \psi_n(y), \tag{3.3}$$

avec

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^2 \frac{d^2}{dy^2}, \tag{3.4}$$

où n est un nombre quantique. En substituant (3.3) et (3.4) dans (3.2), l'équation de Schrödinger s'écrit sous la forme

$$\left\{-\frac{d^2}{dy^2} + \left(\frac{\hbar}{\mu\omega}\right)^2 y^2\right\} \psi_n(y) = \varepsilon_n \psi_n(y), \tag{3.5}$$

avec l'expression de ε_n est donnée par

$$\varepsilon_n = \frac{2E_n}{\mu\omega^2} - \frac{\eta^2}{\omega^4}. \tag{3.6}$$

où n est le nombre aux niveaux des énergies.

3.1 Spectre énergétique

Afin de résoudre l'équation (3.5) par l'approche de la supersymétrie, on écrire la fonction d'onde de l'état fondamental sous la forme

$$\psi_0(y) \sim \exp\left[-\left(\int^y W(x)\,dx\right)\right]. \tag{3.7}$$

où $W(y)$ est appelé le superpotentiel. Substituant (3.7) dans (3.5) et en prenant $n = 0$, on obtient l'équation différentielle de type de Riccati sous la forme

$$W^2(y) - \frac{dW(y)}{dy} = \left(\frac{\hbar}{\mu\omega}\right)^2 y^2 - \varepsilon_0. \tag{3.8}$$

où ε_0 est le spectre d'énergie de l'état fondamental. Pour verifier la compatibilité entre les deux membres de l'équation (3.8), on peut prendre la fonction de superpotentiel $W(x)$ sous la forme suivante

$$W(y, A) = Ay, \tag{3.9}$$

qui s'intègre pour donner la fonction propre de l'état fondamental sous la forme

$$\psi_0(y) = N_0 \exp\left(-\frac{Ay^2}{2}\right), \tag{3.10}$$

où N_0 est une constante de normalisation qui doit être réel. Par ailleurs, la normalisation de $\psi_0(x, A)$ au sens de (2.9) exige que le paramètre A soit strictement positif. Cette fonction est $\mathcal{PT}$-symétrique ($\psi_0(x, A) = \psi_0^*(-x, A)$) en choisissant $N_0 = N_0^*$.

Insérant (3.9) dans (3.8) et en identifiant entre les termes de même puissances de y, on obtient

$$A = \frac{\hbar}{\mu\omega}, \tag{3.11}$$

$$\varepsilon_0 = A. \tag{3.12}$$

Ainsi, le spectre d'énergie ε_0 est une valeur réelle. On a donc

$$\varepsilon_0 = \frac{\hbar}{\mu\omega}. \tag{3.13}$$

En tenant compte de (3.6), le spectre d'énergie de l'état fondamental du système original est donné par

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\mu\eta^2}{2\omega^2} \tag{3.14}$$

En vertu de (3.9), le potentiel partenaire supersymétrique $V^{(-)}(y, A)$ est donnée par

$$V^{(-)}(y, A) = W^2(y, A) - \frac{dW(y, A)}{dy} = A^2y^2 - A, \tag{3.15}$$

et aussi le deuxiéme potentiel partenaire supersymétrique$V^{(+)}(y, A)$ s'écrit

$$V^{(+)}(y, A) = W^2(y, A) + \frac{dW(y, A)}{dy} = A^2y^2 + A \tag{3.16}$$

L'ensemble du spectre est tout aussi facilement déduit de la condition d'invaraince de forme

$$\begin{aligned} V^{(+)}(y, A) &= A^2y^2 + A \\ &= V^{(-)}(y, a_1) + 2A, \end{aligned} \tag{3.17}$$

qui est bien de la forme réquise, avec $a_1 = A$, a_2 est une fonction de a_1. i.e.,

$$a_2 = f(a_1) = a_1 = A \tag{3.18}$$

$$a_3 = f(a_2) = f \circ f(a_1) = a_1 = A$$

$$a_4 = f(a_3) = f \circ f \circ f(a_1) = a_1 = A$$

$$\vdots$$

$$a_k = f(a_{k-1}) = f \circ \ldots \circ f \circ f \circ f(a_1) = a_1 = A, \tag{3.19}$$

et $R(a_1)$ est le reste indépendant de y

$$R(a_1) = 2a_1 = 2A. \tag{3.20}$$

où $k = 0, 1, 2, ...$

D'aprés (2.29), on en déduit l'expression des énergies des états excités de $V^{(-)}(y)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(-)} &= 0 \\ \varepsilon_n^{(-)} &= \sum_{k=1}^{n} R(a_k) = R(a_1) + R(a_2) + ... + R(a_n) \\ &= \underbrace{2A + 2A + ... + 2A}_{n \text{ fois}} \\ &= 2nA\ . \end{aligned} \tag{3.21}$$

En vertu de (3.8), le spectre d'énergie ε_n qui vérifier l'équation (3.6), est donné par

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(-)} + \varepsilon_0. \tag{3.22}$$

Compte tenu de les équations (3.12), (3.21) et (3.22), on obtient l'expression du spectre d'énergie ε_n de potentiel $\tilde{V}(y)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= A(2n+1) \\ &= \frac{\hbar}{\mu\omega}(2n+1), \end{aligned} \tag{3.23}$$

où n est nombre quantique entier positif ou nul.

Enfin, à partir de l'équation (3.6) et (3.23), on peut trouver le spectre d'énergie du système original, est donné par

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \frac{\mu\eta^2}{2\omega^2}. \tag{3.24}$$

Le nombre des valeurs propres E_n est illimité parce que le nombre quantique est également illimitée. Par ailleurs, le spectre est entièrement réel et coïncide avec celui de l'oscillateur harmonique, décalé par une quantité positive égale à $\frac{\mu\eta^2}{2\omega^2}$. Dans la version Hermitienne, $\eta \rightarrow \pm i\eta$, le spectre est aussi celui de l'oscillateur harmonique, mais décalé par une quantité négative égale à $-\frac{\mu\eta^2}{2\omega^2}$. Par conséquent, l'effet de la complexification sur le spectre résulte seulement dans le changement du sens du décalage.

3.2 Fonctions d'onde normalisées

Afin d'obtenir les fonctions d'onde des états excitées $\psi_n(x)$ de potentiel $\mathcal{PT}$-symétrique $V(x)$, nous appliquons la technique de la mécanique quantique supersymétrique et l'invariance de forme. Pour ce faire, nous utilisons la relation de récurrence (2.32)

$$\begin{aligned} \psi_n(y,a_1) &\sim A^+(y,a_1)\,\psi_{n-1}(y,a_2) \\ &\sim \left(-\frac{d}{dy}+Ay\right)\psi_{n-1}(y,a_1), \end{aligned} \tag{3.25}$$

avec un nouveau changement de varaible

$$z=\sqrt{A}y \text{ et } \psi_n(y,a_1)\equiv\varphi_n(z,a_1), \tag{3.26}$$

on obtient une nouvelle relation de récurrence, qui donnée par

$$\varphi_n(z,a_1)\sim\left(-\frac{d}{dz}+z\right)\varphi_{n-1}(z,a_1). \tag{3.27}$$

En introduisant une nouvelle fonction $H_n(z,a_1)$ à travers la relation

$$\varphi_n(z,a_1)=\varphi_0(z,a_1)\,H_n(z,a_1), \tag{3.28}$$

où $a_1=a_2=a_3=...=a_n=A$ et en vertu de (3.10), la fonction $\varphi_0(z,a_1)$ est définie par

$$\varphi_0(z,a_1)\sim\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \tag{3.29}$$

En se servant de l'équation (3.27) et de la transformation (3.28) et après un calcul simple, on obtient

- $n = 0 \Rightarrow H_0(z,A)=1.$
- $n = 1 \Rightarrow H_1(z,A)=2zH_0(z,A).$
- $n = 2 \Rightarrow H_2(z,A)=2zH_1(z,A)-2H_0(z,A).$
- $n = 3 \Rightarrow H_3(z,A)=2zH_2(z,A)-4H_1(z,A).$
- $n = 4 \Rightarrow H_4(z,A)=2zH_3(z,A)-6H_2(z,A).$

  .

  .

- $n = m \Rightarrow H_m(z,A)=2zH_{m-1}(z,A)-2(m-1)H_{m-2}(z,A).$

Ainsi, nous concluons que $H_n(z)$ est un polynôme d'Hermite de dégrée n (Voir la formule (8.952.2) dans [34]). Par conséquent, on obtient la relation

$$\varphi_n(z) \sim \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) H_n(z). \tag{3.30}$$

En vertu de la propriété

$$H_n(-z) = (-1)^n H_n(z), \tag{3.31}$$

et la relation d'orthogonalité ($\Phi_n(x) \equiv \psi_n(y) \equiv \varphi_n(z)$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-z^2\right) [H_n(z)]^2 = \sqrt{\pi} 2^n n!, \tag{3.32}$$

et aussi, en tenant compte des Eqs. (3.31), (3.32), (3.26), (3.3) et (3.30), on obtient les fonctions d'onde des états excitées de problème original sous la forme

$$\Phi_n(x) = |N_n| e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\left(x+i\frac{\eta}{\omega^2}\right)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\left(x+i\frac{\eta}{\omega^2}\right)\right), \text{ pour } n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.33}$$

avec

$$|N_n| = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.34}$$

où $|N_n|$ la constante de normalisation $|N_n'|$ peut être évaluée en normalisant $\Phi_n(x)$ selon la relation (2.9). En effet, ces fonctions sont $\mathcal{PT}$-symétriques,i.e., $\Phi_n(x) = \Phi_n^*(-x)$.

En remplaçant η par $\pm i\eta$, on obtient les fonctions d'onde dans la version Hermitienne du problème, qui sont bien sûr réelles.

3.3 Cas spécial

Mentionnons enfin, que dans le cas spécial où $\eta = 0$, on obtient bien le spectre et les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique

$$E_n^{OH} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \tag{3.35}$$

et

$$\Phi_n^{OH}(x) = |N_n| e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x\right), \tag{3.36}$$

où $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3.3.1 Exemple illustratif

Considérons le cas particulier correspondant à $\mu = \hbar = \omega = 1$.

Dans ce cas le potentiel de l'oscillateur harmonique s'écrit : $V^{OH}(x) = \frac{1}{2}x^2$

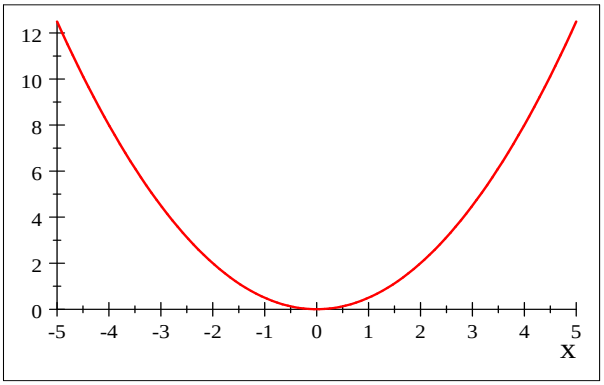


Figure 1: Potentiel de l'oscillateur harmonique

1. L'énergie de l'état fondamental, pour $n = 0$, est donnée par : $E_0^{OH} = \frac{1}{2}$, et la fonction propre normalisée correspondante s'écrit

$$\Phi_0^{OH}(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

L'allure de la fonction d'onde de l'état fondamental est représentée sur la figure ci-dessous

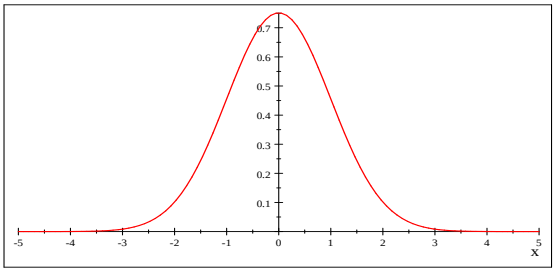


Figure 2: La fonction d'onde de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique

Il est clair que cette fonction ne présente aucun nœud, c'est-à-dire qu'elle ne s'annule pas sur l'intervalle de définition de potentiel et par conséquent, elle représente bien la fonction d'onde d'un état fondamental.

2. L'énergie de premier état excité de l'oscillateur harmonique, pour $n = 1$, est $E_1^{OH} = \frac{3}{2}$, et la fonction propre normalisée correspondante est

$$\Phi_1^{OH}(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_1(x) = \sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{4}} x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

L'allure de la fonction d'onde du premier état excité est représentée sur la figure ci-dessous

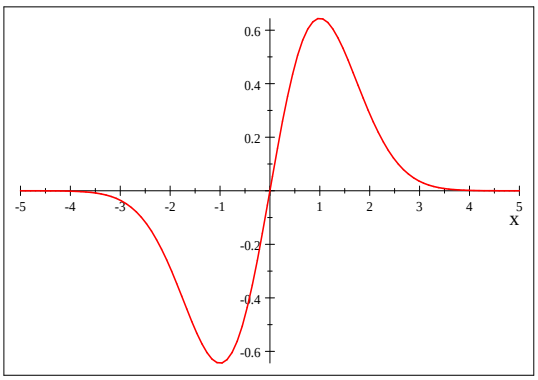


Figure 3: la fonction d'onde du premier état excité

La courbe montre l'existence d'un nœud et par conséquent elle représente bien la fonction d'onde du premier état excité.

3. L'énergie de deuxième état excité de l'oscillateur harmonique, pour $n = 2$, est $E_2^{OH} = \frac{5}{2}$, et la fonction propre normalisée correspondante est

$$\begin{aligned} \Phi_2^{OH}(x) &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_2(x); \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(4x^2 - 2\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

L'allure de la fonction d'onde du deuxième état excité est représentée sur la figure ci-dessous

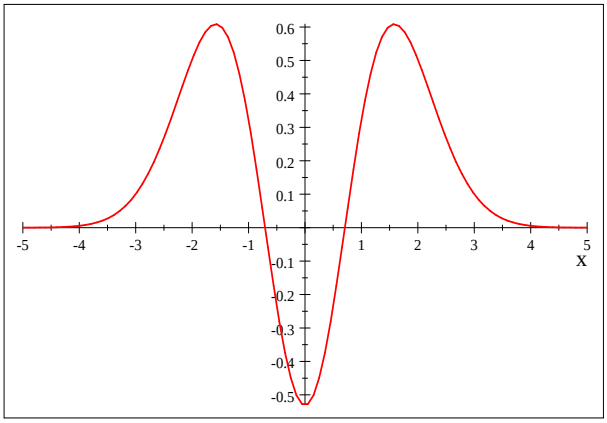


Figure 4: La fonction d'onde de deuxième état excité

La courbe montre l'existence de deux nœuds et par conséquent elle représente bien la fonction d'onde du deuxième état excité.

Nous avons obtenu dans ce chapitre le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés de l'équation de Schrödinger à une dimension pour une particule scalaire soumise à un potentiel de l'oscillateur harmonique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique en utilisant l'approche de la supersymétrie en mécanique quantique, et nous allons traiter dans le chapitre suivant les états liés d'une particule non relativiste soumise à un potentiel moléculaire Hyperbolique, $\mathcal{PT}$-symétrique.

Chapitre 4

Etats liés d'une particule non relativiste soumise à un potentiel moléculaire Hyperbolique, $\mathcal{PT}$-symétrique

Dans ce chapitre, nous allons étudier les états liés d'une particule non relativiste de masse constante μ se déplaçant dans un espace unidimensionnel sous l'effet d'un potentiel moléculaire Hyperbolique, $\mathcal{PT}$-symétrique [32], donné par

$$V_{\mathcal{H}}(x) = \left(\sigma \tanh \alpha x + i\frac{\delta}{\sigma}\right)^2, \tag{4.1}$$

où δ, σ et α sont des constantes réelles positives et i est un nombre imaginaire ($i^2 = -1$). Pour l'existence des états liés, $\sigma^2 > \delta$. Cependent, la fonction $\mathcal{PT}$-symétrique $V_{\mathcal{H}}(x)$ (où $V^*_{\mathcal{H}}(x) = V_{\mathcal{H}}(-x)$) prend la forme d'un puits de potentiel de Rosen-Morse II avec un décalage constant. En l'absence du terme $\mathcal{PT}$-symétrique, i.e., $\delta = 0$, ce potentiel se réduit à celui de Pöchl-Teller avec un décalage constant.

L'équation aux valeurs propres de Schrödinger stationnaire à une dimension relative au potentiel $U_{\mathcal{H}}(x)$ s'écrit

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + U_{\mathcal{H}}(x)\right\}\psi_n(x) = \mathcal{E}_n\psi_n(x), \tag{4.2}$$

d'où

$$U_{\mathcal{H}}(x) = -\frac{\eta_1}{\cosh^2 \alpha x} + 2i\eta_2 \tanh \alpha x, \tag{4.3}$$

avec les abréviations suivantes

$$\eta_1 = \frac{2\mu}{\hbar^2}\sigma^2 \ , \ \eta_2 = \frac{2\delta\mu}{\hbar^2}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{E}_n = \frac{2\mu\varepsilon_n}{\hbar^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\sigma^2 - \frac{\delta^2}{\sigma^2}\right). \tag{4.5}$$

où ε_n est le spectre d'énergie de $V_{\mathcal{H}}(x)$ et $\psi_n(x)$ est la fonction d'onde correspondante.

4.1 Détermination des valeurs propres

En vertu de (3.7). on obtient l'équation différentielle non-linéaire de type Riccati qui réalisé par le superpotentiel $W(x)$

$$W^2(x) - \frac{dW(x)}{dx} = U_{\mathcal{H}}(x) - \mathcal{E}_0 \tag{4.6}$$

où $\mathcal{E}_0$ est l'énergie de l'état fondamental de $U_H(x)$. Ainsi, le superpotentiel prend la forme suivante

$$W(x, B) = B \tanh \alpha x + \frac{i\eta_2}{B}, \tag{4.7}$$

où B est un paramètre réel.

La fonction d'onde de l'état fondamental

$$\psi_0(x, B) \sim \exp\left(-\int^x W(y, B)\, dy\right), \tag{4.8}$$

peut être obtenue sous la forme

$$\psi_0(x, B) = N_0 (\cosh \alpha x)^{-\frac{B}{\alpha}} e^{-\frac{i\eta_2}{B}x}, \tag{4.9}$$

qui est bien une fonction $\mathcal{PT}$-symétrique si la constante de normalisation est choisie réelle, $N_0 = N_0^*$. Par ailleurs, on peut se convaincre facilement que sa normalisation au sens de (2.9) exige que B soit strictement positif,

$$B > 0. \tag{4.10}$$

Par ailleurs, les paramètres B et l'énergie $\mathcal{E}_0$ de l'état fondamental sont déterminés à partir de la relation (4.6) cette fonction est de carré sommable lorsque le paramètre B doit être strictement positif.

Insérant les équations (4.7) et (4.3) dans (4.6), on obtient

$$-\frac{B\left(B+\alpha\right)}{\cosh^2\alpha x}+2i\eta_2\tanh\alpha x+B^2-\frac{\eta_2^2}{B^2}=-\frac{\eta_1}{\cosh^2\alpha x}+2i\eta_2\tanh\alpha x-\mathcal{E}_0. \tag{4.11}$$

Ce qui conduit au systeme d'équations

$$B\left(B+\alpha\right)=\eta_1,\quad \eta_1=\frac{2\mu\sigma^2}{\hbar^2}, \tag{4.12}$$

et

$$\mathcal{E}_0=\frac{\eta_2^2}{B^2}-B^2. \tag{4.13}$$

En tenant compte de (4.12) et (4.10), le paramètre B est donné par

$$\begin{aligned} B &= \alpha\sqrt{\frac{\eta_1}{\alpha^2}+\frac{1}{4}}-\frac{\alpha}{2} \\ &= \alpha\sqrt{\frac{2\mu\sigma^2}{\alpha^2\hbar^2}+\frac{1}{4}}-\frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

En tenant compte de (4.13) et (4.5), le spectre d'énergie de l'état fondamental du système original est donné par

$$\varepsilon_0=\left(\sigma^2-\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)+\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\eta_2^2}{B^2}-\frac{\hbar^2}{2\mu}B^2. \tag{4.15}$$

A partir l'équation (4.7), les potentiels partenaires supersymétrues $V^{(\mp)}\left(x\right)=W^2\left(x\right)\mp W^{'}\left(x\right)$ s'écrivent

$$V^{(-)}\left(x,B\right) = -\frac{B\left(B+\alpha\right)}{\cosh^2\alpha x}+2i\eta_2\tanh\alpha x+B^2-\frac{\eta_2^2}{B^2}, \tag{4.16}$$

$$V^{(+)}\left(x,B\right) = -\frac{B\left(B-\alpha\right)}{\cosh^2\alpha x}+2i\eta_2\tanh\alpha x+B^2-\frac{\eta_2^2}{B^2} \tag{4.17}$$

D'autre part, la condition de l'invariance de forme est réalisée par les potentiels partenaires (4.16) et (4.17), s'écrit

$$R\left(B_1\right)=V^{(+)}\left(x,B_0\right)-V^{(-)}\left(x,B_1\right)=\left(\hat{a}_1^2-\frac{\eta_2^2}{B_1^2}\right)-\left(\hat{a}_2^2-\frac{\eta_2^2}{\hat{a}_2^2}\right) \tag{4.18}$$

où $\hat{a}_1 = B$ et $\hat{a}_2 = f(\hat{a}_1) = B - \alpha$ et notons que le reste $R(\hat{a}_1)$ est independent de x.

En tenant compte de la relation (4.11), on obtient le lien entre le spectre d'énergie de potentiel effectif $U_{\mathcal{H}}(x)$ et le potentiel partenaire $V^{(-)}(x)$

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{(-)} + \mathcal{E}_0, \tag{4.19}$$

avec

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\eta_2^2}{\hat{a}_1^2} - \hat{a}_1^2. \tag{4.20}$$

Par conséquent, le spectre d'énergie de potentiel partenaire $V^{(-)}(x, B)$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^{(-)} &= \sum_{k=1}^{n} R(\hat{a}_k) \\ &= \left(\hat{a}_1^2 - \frac{\eta_2^2}{\hat{a}_1^2}\right) - \left(\hat{a}_n^2 - \frac{\eta_2^2}{\hat{a}_n^2}\right), \end{aligned} \tag{4.21}$$

où $\hat{a}_n$ est une fonction de $\hat{a}_1$,i.e.

$$\hat{a}_n = \underbrace{f \circ f \circ ..... \circ f}_{n \text{ fois}}(\hat{a}_1) = B - n\alpha. \tag{4.22}$$

Insérant (4.21) et (4.20) dans (4.19), on obtient

$$\mathcal{E}_n = -\left(\hat{a}_n^2 - \frac{\eta_2^2}{\hat{a}_n^2}\right), \tag{4.23}$$

En vertu de (4.5) et (4.23), les valeurs propres ε_n sont données par

$$\varepsilon_n = \sigma^2 - \frac{\delta^2}{\sigma^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\hat{a}_n^2 - \frac{\eta_2^2}{\hat{a}_n^2}\right), \tag{4.24}$$

Substituant (4.22), (4.14) et (4.4) dans (4.24), on obtient les valeurs propres du spectre d'énergie de $V_{\mathcal{H}}(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \sigma^2 - \frac{\delta^2}{\sigma^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\left((B - n\alpha)^2 - \frac{\eta_2^2}{(B - n\alpha)^2}\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\left(\frac{2\delta\mu}{\hbar^2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2\mu\sigma^2}{\hbar^2} + \frac{\alpha^2}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right)^2} - \left(\sqrt{\frac{2\mu\sigma^2}{\hbar^2} + \frac{\alpha^2}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right)^2\right) \\ &\quad + \sigma^2 - \frac{\delta^2}{\sigma^2}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

où le nombre d'états liés du système original est déterminé par

$$0 \leq n < \{C\}\,. \tag{4.26}$$

où $\{C\}$ désigne le plus grand entier inférieur à $C = \sqrt{\frac{2\mu\sigma^2}{\alpha^2\hbar^2} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$.

On constate que les énergies ε_n, possibles, sont réelles. Dans la version Hermitienne du problème, i.e. $\delta \rightarrow \pm i\delta$, toutes les énergies possibles sont réelles. En d'autres termes, comparativement avec le potentiel de Pöschl-Teller ($\delta = 0$), chaque niveau d'énergie du potentiel de Rosen-Morse est décalé vers le bas ou vers le haut, selon que le paramètre δ est réel ou imaginaire pur, respectivement.

4.2 Détermination des fonctions propres normalisées

Afin de déterminer les fonctions d'onde $\psi_n(x)$ des états excités de potentiel $V_{\mathcal{H}}(x)$, reportons les éqs. (4.2), (4.12) dans (4.24). Cette dernière s'écrit

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{B(B+\alpha)}{\cosh^2\alpha x} + 2i\eta_2 \tanh\alpha x\right\}\psi_n(x) = \left(\frac{\eta_2^2}{(B-n\alpha)^2} - (B-n\alpha)^2\right)\psi_n(x)\,, \tag{4.27}$$

En utilisant le changement de variable

$$y = \tanh\alpha x \text{ avec } y \in]-1,1[\text{ et } \psi_n(x) \equiv \Phi_n(y)\,, \tag{4.28}$$

et introduisant la transformation ponctuelle

$$\Phi_n(y) = (1-y)^{\frac{a_n}{2}}(1+y)^{\frac{b_n}{2}} P_n(y)\,, \tag{4.29}$$

où $P_n(y)$ est un certain polynôme de degré n et a_n et b_n sont des nombres complexes. Pour que $\psi_n(x)$ s'annule aux points $x \rightarrow \pm\infty$ ($y \rightarrow \pm 1$), a_n et b_n doivent satisfaire

$$\mathrm{Re}\, a_n > 0 \text{ et } \mathrm{Re}\, b_n > 0. \tag{4.30}$$

Ainsi, l'équation differentielle hypergéométrique satisfaite par la nouvelle fonction $P_n(y)$ se déduit de (4.27), est donnée par

$$\left(1-y^2\right)\frac{d^2P_n(y)}{dy^2} + \left[b_n - a_n - (a_n+b_n+2)\,y\right]\frac{dP_n(y)}{dy} + n\,(n+a_n+b_n+1)\,P_n(y) = 0, \tag{4.31}$$

où les paramètres a_n et b_n sont définis par

$$a_n = \left(\frac{B}{\alpha} - n\right) + i\frac{\eta_2}{\alpha\left(B - \alpha n\right)} \tag{4.32}$$

$$b_n = \left(\frac{B}{\alpha} - n\right) - i\frac{\eta_2}{\alpha\left(B - \alpha n\right)} = a_n^* \tag{4.33}$$

En effet, l'équation (4.31) est dite équation differentiellle de Jacobi et sa solution est donnée par le polynome de Jacobi $P_n^{(a_n,b_n)}(y)$ ($P_n(y) \equiv P_n^{(a_n,b_n)}(y)$). Par ailleurs, nous notons que le paramètre complexe a_n est l'adjoint de b_n et vice versa. Ainsi, grâce à cette propérité, on a la relation symétrique de polynôme de Jacobi [33]

$$P_n^{(a_n,b_n)}(-y) = (-1)^n P_n^{(b_n,a_n)}(y), \tag{4.34}$$

D'après (4.28) et (4.29), on peut exprimer les fonctions d'onde $\psi_n(x)$ du problème sous la forme

$$\psi_n(x) = |N_n| e^{i\frac{n\pi}{2}} \left(1 - \tanh\alpha x\right)^{\frac{a_n}{2}} \left(1 + \tanh\alpha x\right)^{\frac{b_n}{2}} P_n^{(a_n,b_n)}(\tanh\alpha x), \tag{4.35}$$

cette fonction est $\mathcal{PT}$-symétrique, $\mathcal{PT}\psi_n(x) = \psi_n^*(-x) = \psi_n(x)$. En tenant compte des équations (4.35), 4.34), (2.9) et la propriété suivante (Voir la formule (7.391.5) dans [34]),

$$\int_{-1}^{1} (1-y)^{\nu-1}(1+y)^{\mu}\left[P_n^{(\nu,\mu)}(y)\right]^2 dy = \frac{2^{\mu+\nu}\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}{\nu\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+\mu+n+1)}, \tag{4.36}$$

où $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ et $\mathrm{Re}(\mu) > -1$, la constante de normalisation $|N_n|$ est obtenue sous la forme

$$|N_n| = \sqrt{\frac{2\alpha a_n b_n \Gamma(n+1)\Gamma(a_n+b_n+n+1)}{2^{a_n+b_n}(a_n+b_n)\Gamma(a_n+n+1)\Gamma(b_n+n+1)}}. \tag{4.37}$$

4.3 Quelques cas spéciaux

4.3.1 Premier cas : Potentiel de l'oscillateur harmonique

En remplacant

$$\delta = 0 \text{ et } \sigma = \left(\frac{\mu\omega^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.38}$$

dans (4.1) et prenant la limite $\alpha \to 0$, le potentiel (4.1) devient

$$\lim_{\alpha\to 0} V_{\mathcal{H}}(x)\Big|_{\delta=0} \Rightarrow V^{\mathcal{OH}}(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2. \tag{4.39}$$

Ce potentiel est représente l'oscillateur harmonique à une dimension qui possède une solution exact est bien connue dans la littérature. Ainsi, le spectre d'énergie (4.25) se réduit à

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\varepsilon_n\Big|_{\delta=0} \quad \Rightarrow \quad E_n^{\mathcal{OH}} &= \lim_{\alpha\to 0}\left\{\left(\frac{\mu\omega^2}{2\alpha^2}\right)-\frac{\mu\omega^2}{2\alpha^2}\left(\sqrt{1+\frac{\hbar^2\alpha^4}{4\mu^2\omega^2}}-\frac{\alpha^2\hbar}{\mu\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right\}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\mu\omega^2}{2\alpha^2}\right)\left\{1-\left(1+\frac{\hbar^2\alpha^4}{4\mu^2\omega^2}\right)\left(1-\frac{\frac{\hbar\alpha^2}{\mu\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{\hbar^2\alpha^4}{4\mu^2\omega^2}}\right)^2\right\}\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Cependant, la condition (4.26) sur le nombre des états liés devient

$$0\leq n\leq\infty. \tag{4.41}$$

En vertu de (4.38) et la limite $\alpha\to 0$, les paramètres a_n et b_n donnés par (4.32) et (4.33), respectivement, ils sont réduisent à

$$a_n=b_n=s-n\to\infty \text{ où } s=\left(\sqrt{\frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2\alpha^4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right), \tag{4.42}$$

Par conséquent, les fonctions d'onde (4.35) et la constante de normalisation (4.37) deviennent

$$\psi_n(x)|_{\delta=0}\Rightarrow\bar{\psi}_n(x)=\left|\bar{N}_n\right|\left(1-\tanh^2\alpha x\right)^{\frac{s-n}{2}}P_n^{(s-n,s-n)}(\tanh\alpha x), \tag{4.43}$$

avec

$$\left|\bar{N}_n\right|=\frac{\left[\alpha a_n\Gamma(n+1)\Gamma(2a_n+n+1)\right]^{\frac{1}{2}}}{2^{a_n}\Gamma(a_n+n+1)}. \tag{4.44}$$

En utilisant le lien entre le polynôme de Jacobi et le polynôme de Gegenbauer (Voir la relation (22.5.27) dans [35]), nous obtenons

$$P_n^{(s-n,s-n)}(x)=\frac{\Gamma(2s-2n+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-n+1)\Gamma(2s-n+1)}\mathcal{C}_n^{\left(s-n+\frac{1}{2}\right)}(x) \text{ où } s-n\neq-\frac{1}{2}, \tag{4.45}$$

où $\mathcal{C}_n^{\left(s-n+\frac{1}{2}\right)}$ est un polynome de Gegenbauer de degré n. Substituant cette relation dans (4.43), on obtient

$$\bar{\psi}_n(x)=|C_n|\,\lambda^{-\frac{n}{2}}\left(1-\tanh^2\alpha x\right)^{\frac{s-n}{2}}\mathcal{C}_n^{\left(s-n+\frac{1}{2}\right)}(\tanh\alpha x), \tag{4.46}$$

avec

$$\lambda=2s-2n+1, \tag{4.47}$$

et la nouvelle constante

$$|C_n| = \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(2s-2n+1\right)}{2^{s-n}\Gamma\left(s-n+1\right)}\left[\frac{\alpha\left(s-n\right)\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(2s-n+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.48}$$

Grâce à la relation existant entre le polynôme de Gegenbauer et le polynôme de Hermite (Voir relation (8.936.5) dans [34]),

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-\frac{n}{2}}C_n^{\frac{\lambda}{2}}\left(x\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{n!}H_n\left(x\right), \tag{4.49}$$

et avec les deux limites suivantes

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\sqrt{s-n+\frac{1}{2}}\tanh\left(\alpha x\right)\right) = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x. \tag{4.50}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\left(1-\tanh^2\alpha x\right)^{\frac{s-n}{2}} &= \lim_{\alpha\to 0}\exp\left\{\frac{1}{2}\left(s-n\right)\ln\left(1-\frac{\left(e^{2\alpha x}-1\right)^2}{\left(e^{2\alpha x}+1\right)^2}\right)\right\}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\exp\left\{\frac{1}{2\alpha^2}\left(\sqrt{\frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2}+\frac{\alpha^4}{4}}-\alpha^2\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right)\ln\left(1-\frac{\left(e^{2(x\alpha)}-1\right)^2}{\left(e^{2(x\alpha)}+1\right)^2}\right)\right\}\\ &= \exp\left\{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2\right\}.\end{aligned} \tag{4.51}$$

La fonction d'onde (4.46) devient

$$\lim_{\alpha\to 0}\bar{\psi}_n\left(x\right)\to\Phi_n^{\mathcal{OH}}\left(x\right) = \left|C_n^{\mathcal{OH}}\right|e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x\right). \tag{4.52}$$

En effectuant la formule de Stirling de la fonction de Gamma (Voir le théorème (1.4.1) dans [36])

$$\Gamma\left(X\right) = \sqrt{2\pi}X^{X-\frac{1}{2}}e^{-X}, \tag{4.53}$$

qui est valable pour un grand X. On obtient facilement la constante de normalisation $\left|C_n^{\mathcal{OH}}\right|$ sous la forme suivante

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\{|C_n|\,\frac{2^{-\frac{n}{2}}}{n!}\right\}\to\left|C_n^{\mathcal{OH}}\right| = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.54}$$

En effet, les deux équations (4.40) et (4.52) sont coïncidents exactement du spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes de potentiel de l'oscillateur harmonique à une dimension [38].

4.3.2 Deuxième cas : Potentiel de Pöschl-Teller

En posant $\delta = 0$, le potentiel (4.1) se réduit à un potentiel Hermitien et symétrique de Pöschl-Teller, qui s'écrit

$$\left(V_{\mathcal{H}}(x) - \sigma^2\right)_{\delta=0} \Rightarrow V_{\mathrm{PT}}(x) = -\frac{\sigma^2}{\cosh^2(\alpha x)}. \tag{4.55}$$

Ce potentiel a été proposé par G. Pöschl et E. Teller pour étudier les états de vibration de molécules diatomiques [37].

En remplaçant $\delta = 0$ dans (4.25) et (4.26), on obtient le spectre d'énergie de potentiel $V_{\mathrm{PT}}(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} E_n^{\mathrm{PT}} &= \varepsilon_n|_{\delta=0} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}(B - n\alpha)^2 \\ &= -\frac{\alpha^2\hbar^2}{2\mu}\left\{\sqrt{\frac{2\mu\sigma^2}{\alpha^2\hbar^2} + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}^2, \end{aligned} \tag{4.56}$$

et le nombre de niveau d'énergie est déterminé par

$$0 \leq n < \sqrt{\frac{2\mu\sigma^2}{\alpha^2\hbar^2} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}. \tag{4.57}$$

Par conséquent, les fonctions d'onde normalisées (4.35) se réduisent à la forme suivante

$$\psi_n^{\mathrm{PT}}(x) = \sqrt{\frac{\alpha(s-n)\Gamma(n+1)\Gamma(2s-n+1)}{2^{2s-2n}\Gamma^2(s+1)}}(\cosh\alpha x)^{n-s} P_n^{(s-n,s-n)}(\tanh\alpha x), \tag{4.58}$$

où $s = \frac{B}{\alpha}$ et le paramètre B est donné par (4.14),i.e,. $s = \sqrt{\frac{2\mu\sigma^2}{\alpha^2\hbar^2} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$. D'après (4.45) et (4.58), la fonction d'onde $\psi_n^{\mathrm{PT}}(x)$ prend la forme suivante

$$\psi_n^{\mathrm{PT}}(x) = \frac{\Gamma(2s-2n+1)}{\Gamma(s-n+1)}\left(\frac{\alpha(s-n)\Gamma(n+1)}{2^{2s-2n}\Gamma(2s-n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}(\cosh\alpha x)^{n-s}\mathcal{C}_n^{\left(s-n+\frac{1}{2}\right)}(\tanh\alpha x), \tag{4.59}$$

où $\mathcal{C}_n^{\left(s-n+\frac{1}{2}\right)}$ est un polynome de Gegenbauer de degrée n.

Ces résultats coïncident avec ceux obtenus dans la littérature [39].

Exemple illustratif

Considérons le cas correspondant à $\mu = \hbar = \alpha = 1$ et $\sigma = 2$. Dans ce cas le potentiel correspondant s'écrit

$$V_{\mathrm{PT}}(x) = -\frac{4}{\cosh^2(x)} \tag{4.60}$$

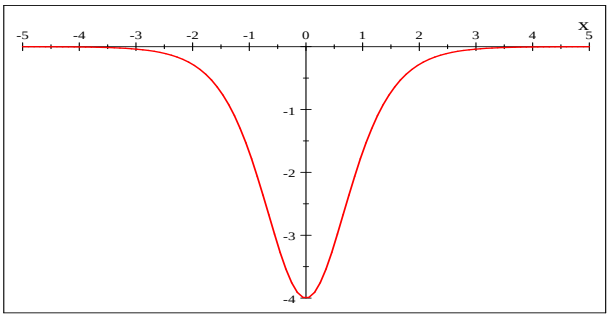


Figure 5: Potentiel de Pöschl-Teller

1. L'énergie de l'état fondamental est donnée par, $E_0^{\mathrm{PT}} = -2.8139$, et la fonction d'onde correspondantes, normalisées à 1, s'écrit

$$\psi_0^{\mathrm{PT}}(x) = (0.90812)\ \ (\cosh x)^{-\left(\sqrt{\frac{33}{4}}-\frac{1}{2}\right)}, \tag{4.61}$$

avec

$$s = \sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} \text{ et } \ \mathcal{C}_0^{\sqrt{\frac{33}{4}}}(\tanh x) = 1 \tag{4.62}$$

L'allure de $\psi_0^{\mathrm{PT}}(x)$ est représentée sur la figure suivante

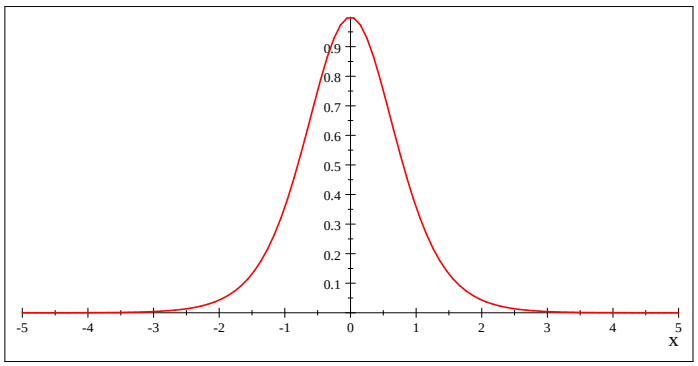


Figure 6: La fonction d'onde de l'état fondamental pour $\mu = \hbar = \alpha = 1$ et $\sigma = 2$

cette fonction ne présente aucun noeud.

2. L'énergie et la fonction d'onde correspondante du premier état excité sont données par

$$E_1^{\mathrm{PT}} = -0.94158, \tag{4.63}$$

et

$$\psi_1^{\mathrm{PT}}(x) = (1.5045)\,.\tanh x\,(\cosh x)^{-\sqrt{\frac{33}{4}}+\frac{3}{2}}, \tag{4.64}$$

avec

$$\mathcal{C}_1^{\left(\sqrt{\frac{33}{4}}-1\right)}(\tanh x) = 2\left(\sqrt{\frac{33}{4}}-1\right)\tanh x \tag{4.65}$$

L'allure de $\psi_1^{\mathrm{PT}}(x)$ est donnée sur la figure suivante

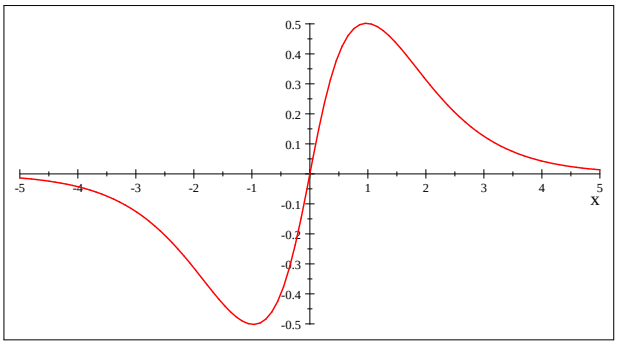


Figure 7: la fonction d'onde du premier état excité pour $\mu = \hbar = \alpha = 1$ et $\sigma = 2$

En effet, notons que les énergies propres sont classées dans un ordre croissant, i,e $E_0^{\mathrm{PT}} < E_1^{\mathrm{PT}}$.

4.3.3 Troisième cas : Potentiel de l'oscillateur harmonique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique

En changeant les paramètres

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\mu\omega^2}{2}} \text{ et } \delta = \frac{\eta\mu}{2\alpha}, \tag{4.66}$$

et en prenant la limite $\alpha \to 0$, le potentiel (4.1) se réduit au potentiel d'oscillateur harmonique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique

$$\left(V_{\mathcal{H}}(x) + \frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)_{\alpha\to 0} \to V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 + i\eta\mu x. \tag{4.67}$$

Ce potentiel est déjà traité dans la section précédente. Ainsi, en tenant compte de (4.66) et la limite $\alpha \to 0$, la contrainte (4.26) se réduite à

$$0 \leq n \leq \infty. \tag{4.68}$$

Ceci conduit à des états liées de spectre d'énergie sont illimitées. D'après (4.25) et (4.66), on a

$$E_n = \lim_{\alpha\to 0}\left(\varepsilon_n + \frac{\delta^2}{\sigma^2}\right) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\mu\omega^2}{2\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(B - n\alpha\right)^2 + \frac{\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\eta\mu^2}{\alpha\hbar^2}\right)^2}{\left(B-n\alpha\right)^2}\right). \tag{4.69}$$

En vertu de (4.66) et prenant la limite $\alpha \to 0$, on a

$$\begin{aligned}\left(B - n\alpha\right)^2 &\to \alpha^2\left[\frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^2 + \frac{\alpha^4}{4}} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \\ &\to \left(\frac{\mu\omega}{\hbar\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right),\end{aligned} \tag{4.70}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{\eta\mu^2}{\alpha\hbar^2}\right)^2}{\left(B-n\alpha\right)^2} &\to \left(\frac{\eta\mu^2}{\alpha\hbar^2}\right)^2\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^2 + \frac{\alpha^4}{4}} - \alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^{-2} \\ &\to \left(\frac{\mu\eta}{\hbar\omega}\right)^2.\end{aligned} \tag{4.71}$$

En insèrant les équations (4.70) et (4.71) dans (4.69), on obtient le spectre d'énergie de potentiel $V\left(x\right)$ est donnée par

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \frac{\mu\eta^2}{2\omega^2}.$$

En vertu de (4.66), les constantes a_n et b_n données par (4.32) et (4.33) respectivement deviennent par

$$a_n \to \tilde{a}_n = \frac{\mu\omega}{\alpha^2\hbar} + i\frac{\eta\mu}{\alpha\hbar\omega} \underset{\alpha\to 0}{\to} \infty, \tag{4.72}$$

et

$$b_n \to \tilde{b}_n = a_n^* = \frac{\mu\omega}{\alpha^2\hbar} - i\frac{\eta\mu}{\alpha\hbar\omega} \underset{\alpha\to 0}{\to} \infty. \tag{4.73}$$

Ceci ramène à la fonction d'onde (4.35) devient

$$\psi_n\left(x\right) = \left|\bar{N}_n\right| e^{i\frac{n\pi}{2}}\left(1-\tanh^2\alpha x\right)^{\frac{\mu\omega}{2\alpha^2\hbar}}\left(\frac{1+\tanh\alpha x}{1-\tanh\alpha x}\right)^{-i\frac{\eta\mu}{2\alpha\hbar\omega}} P_n^{\left(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n\right)}\left(\tanh\alpha x\right), \tag{4.74}$$

et d'après (4.53), (4.72) et (4.73), la constante de normalisation (4.37) se réduite à

$$\lim_{\alpha\to 0}\left|N_n\right| = \left|\bar{N}_n\right| = \sqrt{2^n n!}\sqrt{\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}}. \tag{4.75}$$

Par ailleurs, le polynôme $P_n^{(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)}(x)$ peut être mise sous la forme de formule de Rodrigues (Voir la relation (8.960.1) dans [34]), qui s'écrit

$$\begin{aligned} P_n^{(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)}(\tanh\alpha x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(1-\tanh^2\alpha x\right)^{-\frac{\mu\omega}{\alpha^2\hbar}}\left(\frac{1+\tanh\alpha x}{1-\tanh\alpha x}\right)^{i\frac{\eta\mu}{\alpha\hbar\omega}} \\ &\quad\times\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-\tanh^2\alpha x\right)^{\frac{\mu\omega}{\alpha^2\hbar}+n}\left(\frac{1+\tanh\alpha x}{1-\tanh\alpha x}\right)^{-i\frac{\eta\mu}{\alpha\hbar\omega}}\right]. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Après un calcul simple de limites, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0}\left(1-\tanh^2\alpha x\right)^{\pm\frac{\gamma}{\alpha^2}+c} &= \lim_{\alpha\to 0}\exp\left\{\left(\pm\frac{\gamma}{\alpha^2}+c\right)\ln\left(1-\frac{\left(e^{2\alpha x}-1\right)^2}{\left(e^{2\alpha x}+1\right)^2}\right)\right\} \\ &= \exp\left(\mp\gamma x^2\right), \end{aligned} \tag{4.77}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1+\tanh\alpha x}{1-\tanh\alpha x}\right)^{\pm i\frac{\varkappa}{\alpha}} &= \lim_{\alpha\to 0}\exp\left(\pm i\frac{\varkappa}{\alpha}\right)\ln\left(\frac{1+\tanh\alpha x}{1-\tanh\alpha x}\right) \\ &= \exp\left(\pm 2i\varkappa x\right), \end{aligned} \tag{4.78}$$

en admettant que ($c=0$ or $c=n$), ($\gamma=\frac{\mu\omega}{2\hbar}$ or $\gamma=\frac{\mu\omega}{\hbar}$) et ($\varkappa=\frac{\eta\mu}{2\hbar\omega}$ or $\varkappa=\frac{\eta\mu}{\hbar\omega}$). Par conséquent, la limite de (4.76) quand $\alpha\to 0$, est donnée par

$$\lim_{\alpha\to 0}P_n^{(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}e^{\frac{\mu\omega}{\hbar}\left(x+i\frac{\eta}{\omega^2}\right)^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{\mu\omega}{\hbar}\left(x+i\frac{\eta}{\omega^2}\right)^2}\right], \tag{4.79}$$

cette équation est représente la formule de Rodrigue de polynôme de Hermite (Voir la relation (8.950.1) dans [34]). Ainsi, nous obtenons

$$\lim_{\alpha\to 0}P_n^{(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)}(x)=\frac{1}{2^n n!}H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\left(x+i\frac{\eta}{\omega^2}\right)\right). \tag{4.80}$$

En tenant compte de (4.77), (4.78), (4.75) et (4.80), la fonction d'onde $\psi_n(x)$ s'écrit

$$\psi_n(x)=|\mathcal{N}_n|\,e^{i\frac{n\pi}{2}}e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\left(\frac{\eta}{\omega^2}\right)^2}e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}\left(x+i\frac{\eta}{\omega^2}\right)^2}H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\left(x+i\frac{\eta}{\omega^2}\right)\right), \tag{4.81}$$

avec

$$|\mathcal{N}_n|=\left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.82}$$

Ces résultats sont identiques avec celles obtenus dans le premier chapitre.

Nous avons obtenu dans ce chapitre le spectre des niveaux d'énergie réel ainsi que les fonctions propres correspondentes sous forme explicite, et nous terminons par la discussion de certains cas spéciaux et la comparaison avec les résultats de littérature.

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire consiste en la résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension pour les états liés de deux potentiels $\mathcal{PT}$-symétriques par la méthode super symétrique. Nous rappelons dans le premier chapitre, l'essentiel des résultats généraux du formalisme de la supersymétrie en mécanique quantique et le concept de l'invariance de forme. Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelque notions de la mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique et les propriétés des potentiels non hermitiens $\mathcal{PT}$-symétriques, tout en mettant l'accent sur ceux que nous avons utilisés par la suite dans notre travail propre.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié les états liés d'une particule non relativiste de masse constante soumise un potentiel quadratique plus un potentiel linéaire $\mathcal{PT}$-symétrique en utilisant l'approche de la supe symétrie en mécanique quantique. Par conséquent, nous avons obtenu les valeurs propres réelles et les fonctions d'onde correspondantes qui sont exprimées en termes de polynômes d'Hermite.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension d'une particule de masse constante, soumise à un potentiel moléculaire Hyperbolique $\mathcal{PT}$-symétrique. En utilisant le formalisme de la supersymétrie en mécanique quantique, nous avons obtenu les valeurs propres réelles de spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes sont exprimées en termes de polynômes de Jacobi. Enfin, nous avons discuté de certains cas particuliers et en les comparant avec celles trouvées dans la littérature.

Bibliographie

[1] E. Schrödinger, A methode of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions, Proc. Roy. Irish Acad. **46** A, 9 (1940) ; E. Schrödinger, Further studies on solving eigenvalue problems by factorization, Proc. Roy. Irish Acad. **46** A, 183 (1941) ; E. Schrödinger, The factorization of the hypergeometric equation, Proc. Roy. Irish Acad. **47** A, 53 (1941).

[2] L. Infeld and T.E. Hull, The Factorization Method, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951).

[3] F. Cooper, A. Khare, U. P. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore, 2001) ; F. Cooper, A. Khare, U. P. Sukhatme, Supersymmetry and quantum mechanics, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).

[4] L. Gendenshtein, Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry, JETP Lett. **38**, 356 (1983).

[5] C. M. Bender, S. Boettcher, Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).

[6] C. M. Bender, S. Boettcher, P. N. Meisenger, $\mathcal{PT}$-Symmetric Quantum Mechanics, J. Math. Phys. **40**, 2201 (1999).

[7] C. M. Bender and S. Boettcher, P. N. Meisinger and Q. Wang, Calculation of the hidden symmetry operator in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics, Phys. Lett. A **202**, 286 (2002).

[8] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, Complex extension of quantum mechanics, Phy. Rev. Lett. **89**. 270401 (2002).

[9] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, Must a hamiltonian be hermitian ?, Am. J. Phys. **71**, 1905 (2003) ; C. M. Bender and H. F. Jones, Semiclassical calculation of the $\mathcal{C}$ operator in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics Phys. Lett. A **328**, 102 (2004).

[10] N. Zaghou, Mémoire de Magister réalisé sous la direction de Pro. F. Benamira, intitulé, Supersymétrie et $\mathcal{PT}$ symétrie en mécanique quantique, Université de Jijel, 2005.

[11] M. Znojil, Exact solution for Morse oscillator in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics, Phys. Lett. A **264**, 108 (1999).

[12] G. Lévai, On the normalization constant of $\mathcal{PT}$-symmetric and real Rosen–Morse I potentials, Phys. Lett. A **372**, 6484 (2008).

[13] G. Lévai and E. Magyari, The $\mathcal{PT}$-symmetric Rosen–Morse II potential : effects of the asymptotically non-vanishing imaginary potential component, J. Phys. A : Math. Theor. **42**, 195302 (2009).

[14] G. Lévai, Asymptotic Properties of Solvable $\mathcal{PT}$-Symmetric Potentials, Int. J. Theor. Phys. **50**, 997 (2011).

[15] M. Znojil, $\mathcal{PT}$-symmetrically regularized Eckart, Pöschl-Teller and Hulthén potentials J. Phys. A : Math. Gen. **33**, 4561 (2000).

[16] B. Bagchi and R. Roychoudhury, A new PT-symmetric complex Hamiltonian with a real spectrum, J. Phys. A : Math. Gen. **33**, L1(2000).

[17] B. Bagchi, C. Quesne and M. Znojil, Generalized continuity equation and modified normalization in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2047 (2001).

[18] Z. Ahmed, Real and complex discrete eigenvalues in an exactly solvable one-dimensional complex $\mathcal{PT}$-invariant potential, Phys. Lett. A **282**, 343 (2001).

[19] Z. Ahmed, D. Ghosh, J. A. Nathanc, G. Parkar, Accidental crossings of eigenvalues in the one-dimensional complex $\mathcal{PT}$-symmetric Scarf II potential, Phys. Lett. A **379**, 2424 (2015).

[20] B. Bagchi and C. Quesne, An update on the-symmetric complexified Scarf II potential, spectral singularities and some remarks on the rationally extended supersymmetric partners, J. Phys. A : Math. Theor. **43**, 305301 (2010)

[21] R. K. Yadav, A. Khare, B. Bagchi, N. Kumari and B. P. Mandal, Parametric symmetries in exactly solvable real and $\mathcal{PT}$-symmetric complex potentials, J. Math. Phys. **57**, 062106 (2016)

[22] F. Cannata, M. Ioffe, R. Roychoudhury, P. Roy, A new class of $\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonians with real spectra, Phys. Lett. A **281**, 305 (2001).

[23] H. Nicolai, Supersymmetry and spin systems, J. Phys, A : Math, Gen. **9**, 1497 (1976).

[24] E. Witten, Dynamical breaking of supersymmetry, Nucl. phys. B **188**, 513 (1981) ; E. Witten, Constraints on supersymmetry breaking, Nucl. Phys. B **202**, 253 (1982) ; E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J.differ. Geom. **17**, 661 (1982).

[25] G. Junker, Supersymmetry Methods in Quantum and Statistical Physics (Springer, Berlin, 1996).

[26] : D. T. Barclay, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, A. Pagnamenta and U. Sukhatme, New exactly solvable Hamiltonians : shape invariance and self-similarity, Phys. Rev. A **48**, 2786 (1993) ; A. Khare and U. Sukhatme, New shape-invariant potentials in supersymmetric quantum mechanics, J. Phys. A **26**, L901 (1993).

[27] J. Szczesny, Supersymmetry in QM, Fortschr. Phys. **49**, 723-746 (2001).

[28] S. Weigert, Completeness and orthonormality in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum systems, Phys. Rev. A **68**, 062111 (2003)

[29] C. M. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007)

[30] R. Dutt, A. Khare and U. P. Sukhatme, Exactness of supersymmetric WKB spectra for shape-invariant potentials, Phys. Lett. B **181**, 295 (1986).

[31] J. W. Dabrowska, A. Khare and U. P. Sukhatme, Explicit wavefunctions for shape invariant potentials by operator techniques, J. Phys. A **21**, L 195 (1988).

[32] N. Zaghou, Thése de Doctorat en Sciences Physique réalisé sous la direction de Pro. F. Benamira, intitulé, Supersymétrie et $\mathcal{PT}$-symétrie en mécanique quantique non relativiste et relativiste, Université de Constantine 1, 2017.

[33] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Birkhauser, Basel,1988).

[34] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 2007).

[35] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (U.S. GPO, Washington, D.C, 1964).

[36] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications* (The University Press, Cambridge, 1999).

[37] G. Pöschl and E. Teller, Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators, Zeitschrift für Physik. **83**, 143 (1933).

[38] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Mechnaics, Non-Relativistic Theory* (Pergamon, New York, 1977)

[39] M. M. Nieto, Exact wave-function normalization constants for the $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^{-2} z$ and Pöschl-Teller potentials, Phys. Rev. A **17**, 1273-1283 (1978).