Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention

du

Diplome de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Application

Par

ALLICHE Rezki

Thème

Mise en oeuvre de la méthode spectrale

Soutenu publiquement, le 07 /07 /2019 devant le jury composé de :

Mr.	M.KRIMI	MAA	U.Y.F.M	Président.
Mr.	N.BENAICHOUCHE	MAA	U.Y.F.M.	Encadreur.
Mr.	W.OUKIL	MCB	U.Y.F.M	Examinateur.
Mr.	N.MEKDACHE	MAA	U.Y.F.M	Examinateur.

Remerciements

Je remercie au le premier lieu le Dieu avoir aidé à mener jusqu' à la fin de travail, et Mes parents, pour leur patience, leur financier et moral.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et nos vifs remerciements à notre promoteur : Monsieur BENAICHOUCHE Noureddine pour son aide, sa patience, ainsi que sa gentillesse. Je tiens à exprimer aussi ma reconnaissance à tous mes enseignants.

Et a exprimé vivement ma sincère reconnaissance à tout ceux qui je n'ai pas cités et qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail Merci a tous.

ALLICHE Rezki.

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail à

mon ***père*** *qui m'a soutenue tout*

au long de mes études

ma ***mère*** *qui m'a éclairés notre*

chemin, et qui mes ont encouragés,

mes ***frères*** *et mes* ***sœurs.***

Table des matières

Remerciements i

Dédicace ii

Résumé vi

Notation vii

Introdiction Genirale viii

1 RAPPEL 7

1.1 Espace de Sobolev 7

1.1.1 Espaces $H^k(\Omega), H_0^k(\Omega), H^{-k}(\Omega)$ 7

1.2 Injections de Sobolev 8

1.3 Procédé de Gram-Schmidt 8

1.4 Bases hilbertiennes 9

1.4.1 Espace de Hilbert 9

1.5 Généralités sur les équations aux dérivées partielles (EDP) 13

1.5.1 Les types des équations aux dérivées partielles 14

1.5.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles 15

2 Méthode spectrale 16

2.1 Polynôme Orthogonaux 16

2.1.1 Fonction poids 16

2.1.2 Qalque exemples de polynôme orthogonaux 16

2.1.3 L'expression explicite et implicite de u' et u'' 22

2.2 Méthode Spectrale 28

2.2.1 Méthode de Galerkin 29

2.2.2 Méthode Tau 35

2.2.3 Méthode de collocation 41

2.2.4 Méthode Tau-Collocation 46

2.2.5 Domaine d'application des méthodes spectrales 52

2.2.6 Fonction de bases usuelles 52

2.3 D'approximation polynomiale en dimension une 52

2.3.1 Le projection π_N 52

2.4 Methode spectrale de collocation pour le problème de Dirichlet 57

2.5 L'estimation de l'érreur 60

Liste des Figures

2.1 Solution numérique Galarkin et solution exact de Laplace 35

2.2 Solution numérique de chaleu Tau 41

2.3 Solution numérique de chaleu Taur en point t=0.24 41

2.4 Solution exect de Burgers 46

2.5 Solution numérique de léquation de Burguers Collocation 46

2.6 Solution numérique de Burgers avec Tau Colocation 52

Résumé

Ce travail consiste à résoudre numériquement quelques équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires stationnaires et évolutives par la méthode spectrale.

Notre mémoire est divisé en deux chapitres :

Le premier chapitre est construit pour faire un rappel sur quelques généralités concernant les espaces de Sobolev, les bases Hilbertiennes et généralité sur les équations aux dérivées partielles.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude détaillée de la méthode spectrale et la résolution de quelques types d'équations linéaires et non linéaires.

Notation

$H^k(\Omega)$: Espace de Sobolev.

$H^{-k}(\Omega)$: Dial topologique de espace de Sobolev.

$D(\Omega)$: ensemble des fonctions de classe C^∞et à support compact dans Ω

$C^\infty(\overline{\Omega})$: L'ensemble des fonctions régulières sur le bord de Ω.

$\nabla = \sum \frac{\partial}{\partial x}$

$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

w : Fonctin poid .

$\langle ., . \rangle$: Produit scalaire.

$\langle ., . \rangle_w$: Produit scalaire avec la fonction poids w.

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Les familles des polynômes de Chebychev.

$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Les familles des polynômes de Legendre.

$(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Les familles des polynômes de Laguerre.

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Les familles des polynômes de Hermite.

$P_N(\Gamma)$: Les familles des polynômes de dégre $\leq N$.

$L^2(\Omega)$: $\left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \int\limits_\Omega |u|^2 < +\infty. \right\}$.

π_N : L'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Gamma)$ sur $P_N(\Gamma)$.

$P_N^0(\Gamma^2) = \{ v \in P_N^0(\Gamma^2) \quad , v = 0 \text{ sur } \partial(\Gamma^2) \}$: Les familles des polynômes de dégre $\leq N$, et nul sur le bord de carré Γ^2.

$P_{N-1}^0(\Gamma^2) = \left\{ v \in P_{N-1}^0(\Gamma^2) \quad , v = 0 \text{ sur } \partial(\Gamma^2) \right\}$:Les familles des polynômes de dégre $\leq N-1$, et nul sur le bord de carré Γ^2.

$P_{2N-1}(\Gamma^2) = \left\{ v \in P_{2N-1}^0(\Gamma^2) \quad , v = 0 \text{ sur } \partial(\Gamma^2) \right\}$:Les familles des polynômes de dégre $\leq 2N-1$, et nul sur le bord de carré Γ^2

Introduction générale

Dans quelques cas particuliers, il est impossible de calculer explicitement des solutions des différents modèles physiques. Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions. Le principe des méthodes de résolution numériques des équations aux d´erivées partielles est d'obtenir des valeurs numériques discrète (c'est-'a-dire en nombre fini) qui approchent la solution exacte, donc il faut bien etre conscient de deux points fondamentaux : premiérement, on ne calcul pas des solutions exactes mais approchées. Deuxièmement, on discrètise le problème en représentant des fonctions par un nombre fini de valeurs, c'est-'a-dire que l'on passe du continu au discrèt. Il existe de nombreuses méthodes d'approximation numérique des solutions d'équations numériques aux d´erivées partielles. Nous présentons dans ce trvail l'unes des plus anciennes méthodes, appelées méthode spectrale. Depuis de nombreuses années, ces méthodes sont imposées pour la résolution des équations aux dérivées partielles décrivant les systèmes physiques et mécaniques des filuides. Ce mémoire qui se compose de deux chapitres, et qui a pour but essentiel d'exposer la méthodes spectrale exemples et application numérique sur la résoulution numériques de quelques types d'équations différentielles linéaires et non linéairespar conséquent, il est scindé en trois parties principales :

– Principe de la méthode.

– Exemples d'application

– Simulation numérique par MATLAB.

Premièrement, on donne quelques rappels de base concernant des d'efinitions qui permettront de s'y retrouver dans le vocabulaire employé dans la suite de ce travail.

Le premier chapitre : Un petit rappel sur les équations différentielles aux dérivées, et qalques définitions, et qallque théorèmes des bases hilbertiennes .

La deuxième chapitre : Les methodes spectrales, prancipe de chaque méthode, exemple d'application pour chaque méthode, et simulation numérique par Matlab pour chaque exemple. Et Le dernier partie de cette chapitre l'estimation de l'erreure.

Chapitre 1

RAPPEL

1.1 Espace de Sobolev

1.1.1 Espaces $H^k(\Omega), H_0^k(\Omega), H^{-k}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout entier $\mathbf{k} \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ de la façon suivante:

$$H^k(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k\right\}, \tag{1.1}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

De façon équivalente, on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et $H^{k+1}(\Omega) = \left\{u \in H^k(\Omega), \nabla u \in (H^k(\Omega))^d\right\}$.

On définit enfin $H_0^k(\Omega)$, l'adhérence dans $H^k(\Omega)$ de $D(\Omega)$ ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω.

Proposition 1 *Les espaces $H^k(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega)$ ainsi définis sont des espaces de Hilbert et de plus, si Ω est Lipschitzien, alors l'ensemble $C^\infty(\overline{\Omega})$ des fonctions régulières jusqu'au bord de Ω est dense dans $H^k(\Omega)$.*

1.2 Injections de Sobolev

On se contente ici de donner les résultats concernant l'espace $H_1(\Omega)$ mème si des résultats similaires peuvent ètres démontrés pour les espaces $H_k(\Omega)$ ou les espaces $W^{1,p}(\Omega)$, avec $p \neq 2$. Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$

- Si $d = 1$: on a l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace de Holder $C^{0,\frac{1}{2}}(\Omega)$.
- Si $d = 1$: on a l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour tout p $< +\infty$.Par contre, on n'a pas l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$
- Si $d \geq 3$: on a l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace $L^{p^*}(\Omega)$ avec $p^*=\frac{2d}{d-2}$.

Dans le cas non borné, les résultats sont essentiellement les mèmes (à part quelques variantes du fait que les espaces L^p ne sont pas emboés dans ce cas). La différence essentielle est que la compacité des injections de Sobolev n'est plus vérifiée. Comme on va s'intéresser par la suite à la discrétisation de problème aux dérivées partielles, le cadre de domaines bornés suffira à notre étude.

1.3 Procédé de Gram-Schmidt

Proposition 2 *(Procédé de Gram-Schmidt). Soit Eun ecpace euclidien et* $(e_1, e_2, ...e_n)$ *une base de E. pour chaque* $0 < i < n$*,notons* F_i *le sous-espace vecteriel* $Vect\,(e_1, e_2, ...e_n)$ *engendre par* $e_1, e_2, ...e_n$*.Alors,la famille* $(e'_1, ..., e'_n)$ *définie de la manière suivente est une base orthonormale de E:*

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{e'_1}{\|e'_n\|}, \\ e_i\prime &= \frac{e_i - P_{F_{i-1}}(x)}{\left\|e_i - P_{F_{i-1}}(x)\right\|}, \\ &= \frac{e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i, e'_k\rangle e'_k}{\left\|e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i, e'_k\rangle e'_k\right\|}, \textit{pour } 0 < i \leq n. \end{aligned}$$

1.4 Bases hilbertiennes

1.4.1 Espace de Hilbert

Définition 1 *Un espace de Hilbert réel est un espace vecteriel sur* $\mathbb{R}$*, muni d'un produit scalaire,notée* $\langle x, y\rangle$ *qui est complet la norme associée à ce produit scalaire ,notée* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$*. On rappelle un espace vectoriel normé est complet, si tout suite de Couchy est une-suite convergente dans la limite appartient à cet scalaire.*

Définition 2 *Soit* V *un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $\langle\ ,\ \rangle$*. On appelle base hilbertienne (dénombrable) de* V *une famille dénombrable* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'élément de* V *qui est orthonormale pour le produit scalaire et telle que l'éspace vectorèil engendré par cette famille est dense dans* V .

Proposition 3 *Soit* V *un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $\langle\ ,\ \rangle$*. Soit* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une base hilbertienne de* V *. Pour tout élément* x *de* V *, il existe une unique suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *de réel telle que la somme partielle* $\sum_{n=1}^{p} x_n e_n$ *converge vers* x *qund* p *tend vers l'infini, et cette suite est définie par* $x_n = \langle x, e_n\rangle$*. de plus, on a*

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{n\geq 1} |\langle x, e_n\rangle|^2 , \tag{2.2.2}$$

on écrit, alors

$$x = \sum_{n\geq 1} \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Preuve. S'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{n=1}^{p} x_n e_n = x$, alors par projiction sur e_n (et comme cette suite par définition independante de p) on'a $x_n = \langle x, e_n\rangle$, ce qui prouve l'unicité de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. Montrons maintenant son existance . Par définition de base hilbertienne, pour toute $x \in V$ et pour toute $\varepsilon > 0$, il existe y, combinaison linéaire finie des $(e_n)_n$,telle que $\|x - y\| < \varepsilon$. En utilisent le Théorème suivant

Théorème 1 (2.2.2) *(de projection sur un covexe) Soit* V *un espace de Hilbert . Soit* $K \subset$ V *un convexe fermé non vide. Pour tout* $x \in$ V*, il existe un unique* $x_K \in K$ *telle que*

$$\|x - x_k\| = \min_{y\in K} \|x - y\| . \tag{2.2.2.1}$$

De facon équivalente, x_K est caractérisé par la propriété

$$x_k \in K, \langle x_K - x, x_K - y\rangle \leq 0\ \forall y \in K. \tag{2.2.2.2}$$

On appelle x_K la projection orthogonale sur K de x. Preuve de Théorème (2.2.2) voire [5]

Grace au Théorème (2.2.2) on peut définir une apllication linéaire S_p qui à tout point $z \in V$,fait correspondre $S_p z = z_W$, ou z_W est la projection orthogonale sur sous-espace vecteriel W engendré par les ppremies vecteurs $(e_n)_{1\leq n\leq p}$. En vertu de (2.2.2.2), $(z - S_p z)$ est orthogonal à tout élément de W, donc en particulier à $S_p z$. On déduit que

$$\|z\|^2 = \|z - S_p z\|^2 + \|S_p z\|^2 . \tag{2.2.3}$$

ce qui implique

$$\|S_p z\| \leq \|z\| \, \forall z \in V.$$

Comme $S_p z$ est engendré par les $(e_n)_{1\leq n\leq p}$, et que $(z - S_p z)$ est orthogonal à chacun des $(e_n)_{1\leq n\leq p}$, on vérifie facilement que

$$S_p z = \sum_{n=1}^{p} \langle z, e_n \rangle e_n.$$

Pour p suffisamment gand, on a $S_p y = y$ car yest une conbinaison linéaire finie des $(e_n)_{1\leq n\leq p}$. Par concéquent

$$\begin{aligned} \|S_p x - x\| &\leq \|S_p (x - y)\| + \|y - x\| , \\ &\leq 2 \|x - y\| , \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On en diduit la convergent de $S_p x$ vers x. De cette convergence et de l'équation (2.2.3) on tire

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} \|S_p x\|^2 = \|x\|^2 ,$$

qui n'est rien d'autre que la formule de sommation (2.2.2),est dite Parseval.ble de ■

Proposition 4 *Soit* V *un espace de Hilbert séparable (i.é il existe une famille dénombrable dense dans* V *). Alors, il existe une base hilbertienne dénombrable* V .

Preuve. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la famille dont le sous espace vecterile engendré est dense dans V (on peut toujoure supposer que $(v_n)_{n\geq 1}$ sont libres). Par application ddu procédé de Gram-Schmidt à cette famille, on obtient une famille orthonormale $(e_n)_{n\geq 1}$. Comme $[v_1, ..., v_n] = [e_1, ..., e_n]$, on en déduit que le sous-espcace vecteriel engendré par $(e_n)_{n\geq 1}$ coincide avec celui engendré par $(v_n)_{n\geq 1}$ qui est dense dans V. Donc, $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne. ■

Théorème 2 *Soit* V *un espace de Hilbert réel de démension infinie et A un application linéaire continie,définie positive,outo-adjonte,compacte de* V *dans* V. *Alors les valours propres de A forment une suite* $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ *de réels, stictement positifs que tend vers 0, et il existe une base hilbertienne* $(u_k)_{k\geq 1}$ *de* V *formée de vecteurs propres de A avec :*

$$Au_k = \lambda_k u_k \quad pourk \geq 1.$$

et on obtient la décomposition specctrale de tout élément

$$v \in V \ ,v = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle v, u_k\rangle u_k,$$

avec

$$\|v\|^2 = \sum_{K=1}^{+\infty} |\langle v, u_k\rangle|^2 .$$

Preuve. En utilisent deux lemme suivant

Lemme 1 (2.1.1) *Soit* V *un espace de Hilbert reél (non réduit au seul vecteur nul) et A une application linéaire continue auto-adjointe compacte de* V *dans* V. *On défint*

$$m = \inf_{u\in V\setminus\{0\}} \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \ , etM = \sup_{u\in V\setminus\{0\}} \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle}.$$

Alors, $\|A\| = \max(|m|, |M|)$ *, et soit M , est valeur propre de A.*

Lemme 2 (2.1.2) *Soit* V *un espace de Hilbert et A une application linéaire continue compacte de* V *dans* V. *Pour tout reél* $\delta > 0$*, il néexiste au plus qu'un nobre fini de valeur propres en dehors de l'intervalle* $]-\delta, +\delta[$*, et le sous-espace des vecteurs propres de ces valeurs propres est de dimension finie. Preuve Lemme (2.1.1) el Lemme (2.1.2) voire [5]*

Le lemme (2.1.1) montrons que l'ensemble des valeures propres de A n'est pas vide, tandis que le lemme (2.1.2) montre que cet ensemble est soit fini, soit infini dénombrable avec 0 comme seul point d'accumulation . Par ailleurs, comme A est définie positive , toutes valeurs propres sont strictement positive. Notons (λ_k) les valeurs propres de A et $V_k = \ker(A - \lambda_k Id)$ les sous-espace propres associés (le lemme (2.1.2) nous dit aussi que chaque V_k est de dimension finie). On remarque que les sous-espaces propres V_k sont orthogonaux deux à deux :en effet, si $v_k \in V_k$ et $v_j \in V_j$ avec $k \neq j$,alors, comme A est auto-adjaoint, on a

$$\langle Av_k, v_j\rangle = \lambda_k\langle v_k, v_j\rangle = \langle v_k, Av_j\rangle = \lambda_j\langle v_k, v_j\rangle,$$

d'ou l'on diduit que $\langle v_k, v_j\rangle = 0$ puisque $\lambda_k \neq \lambda_j$. Soit W l'adhérnce dans V de l'union des V_k

$$W = \overline{\left\{ u \in V, \exists K \geq 1 \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{k} u_k, u_k \in V_k \right\}}.$$

On construit facilement une base hilbertienne de W par réunion des bases orthonomales de chaque V_k (chacun dimension finie etborthogonaux entre eux). Montrons qu'en fait $W = V$ (ce qui prouvera aussi que la suite (λ_k) est infinie puisque V est de dimension infinie). On introduit l'orthogonal de W défini par

$$W^{\perp} = \{u \in V \text{ tel que } \langle u, v\rangle = 0 \ \forall v \in W\}.$$

comme W est stable par A ($AW \subset W$), on vérifie que $W^{\perp}$ est aussi stable par A car $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = 0$ si $u \in W^{\perp}$ et $v \in W$. On peut définir la restriction de A à $W^{\perp}$ qui est aussi une application linéaire continue auto-adjointe compacte. Par application du Lemme (2.1.1) , si $W^{\perp} \neq \{0\}$, cette restrection admet aussi une valeur propre et un vecteur propre $u \in W^{\perp}$ qui sont aussi valeur et vecteur propre de A. C'est bien sur une contadiction avec le fait que, par définition , W contient déjà tout les vecteurs propres de A et que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. Par conséquent , on'a nécessairement $W^{\perp} = \{0\}$, et comme fermé on en déduit que $W = \{0\}^{\perp} = V$. ■

Preuve. Preuve de corollaire suivant voire [5, (corollaire 7.3.7)(P:224,225)] ■

Corollaire 1 *Soit Ω un ouvert borné ,régulier de $\mathbb{R}^n$ dont la frontère $\partial\Omega$ décompose en deux parties disdjonts régulière $\partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_D$. Il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réel positif ou nul, qui tend vers l'infini , et il existe une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ $(u_k)_{k\geq 1}$, telle que chaque u_k appertient $H^1(\Omega)$ est vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{dans } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D, \\ \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N. \end{cases}$$

Preuve. Preuve de théorème suivant voir [5, (theorème (7.17)(p.222 et 223)] ■

Théorème 3 *Soit Ω un ouvert borné régulier de class C^1 de $\mathbb{R}^n$. Il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini,et il existe une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ $(u_k)_k$,telle que chaque $u_k \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & p.p \text{ dans } \Omega, \\ u_k = 0 & p.p \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.22}$$

Preuve. Preuve de théorème suivant voir [5, (théorème 7.3.2) (P:219,220)] ■

Théorème 4 *Soit* V *et* H *deux espaces de Hilbert réels de dimension infinie. On suppose que* V$\subset$ H *avec injection compact et que* V *est danse dans* H. *Soit $a(.,.)$ une formulle bilinéaire*

symétrique continue et coircives sur V. *alors les valeurs propres de* $[a(u,v) = \lambda\langle u,v\rangle_H, \forall v \in \mathrm{H}]$ *,forment une suite croissante* $(\lambda_k)_k$ *de réels positifs qui tend verts l'infini,et il existe une base hilbertienne de* H $(u_k)_k$ *de vecteurs propres associés,i.e que*

$$u_k \in \mathrm{V} \; et \; a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v\rangle_{\mathrm{H}}. \forall v \in \mathrm{H}.$$

de plus $\left(u_k, \sqrt{\lambda_k}\right)_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(.,.)$.

1.5 Généralités sur les équations aux dérivées partielles (EDP)

Définition 3 *En calcul différentielles, une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont les solutions sont des fonctions vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables*

$$(x, y, ...) \mapsto u(x, y, ...).$$

Une (EDP) est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

1.Une (EDP) à souvent de très nombreuses solutions, les conditions aux limites restreignent l'ensemble des solutions.

Une équation différentielle très simple est : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, oú u est une fonction inconnue de x et y, cette relation implique que les valeurs $u(x, y)$ sont indépendantes de x. Les solutions de cette équation sont $u(x, y) = f(y)$. L'équation ordinaire : $\frac{du}{dx} = 0$ a pour solution $u(x) = c$, avec c une valeur constante (indépendante de x).

2.Ces deux exemples illustrent qu'en général, la solution d'une (EDO) met en jeu une constante arbitraire, tandis que les (EDP) mettent en jeu des fonctions arbitraires.

3.Dans le cas de deux variables, une (EDP) d'ordre 1 s'écrit sous la forme

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}u(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right) = 0.$$

4.Une équation du second ordre s'écrit comme

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}u(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x, y)\right) = 0.$$

5.L'ordre d'une (EDP) est alors le plus grand ordre de dérivation $m_j + n_j$ qui apparaît dans l'équation.

6.Résoudre une (EDP) dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ (d est le nombre de variables), c'est de trouver une fonction suffisamment différentiable dans Ω,telle que l'équation soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans Ω.

7.On parle également d'(EDP) linéaire homogène lorsque la fonction nulle $u = 0$ est solution. En d'autres termes tous les termes de l'équation contiennent la fonction inconnue ou l'une de ses dérivées partielles.

8.Comme pour les (EDO), les (EDP) linéaires homogènes ont une propriété particulière, communément appelé principe de superposition : toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution.

9. Enfin lorsque l'on ajoute à une solution d'une (EDP) linéaire inhomogène une solution quelconque de l'(EDP) homogène associée, on obtient encore une solution de l'(EDP) inhomogène.

1.5.1 Les types des équations aux dérivées partielles

Équations elliptiques

Les équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires, d'équilibre, généralement défini sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, le plus souvent de type Dirichlet ou Neumann. Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de Laplace (ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{dans } \Gamma. \end{cases}$$

Équations paraboliques

Les équations paraboliques régissent les problèmes d'évolution ou instationnaires dans lesquels intervient le mécanisme de diffusion ou de dissipation. Ces problèmes sont généralement définis sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites du même type qu'en elliptique (quelquefois elles-mêmes instationnaires), ainsi qu'à des conditions initiales. Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de la chaleur soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet, ainsi qu'à des conditions initiales :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = v\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{dans } \Omega, \\ T = T_0 & \text{dans } \Gamma, \\ T(x,0) = f(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Équations hyperboliques

Les équations hyperboliques modélisent la propagation d'ondes sans dissipation. En linéaire, c'est par exemple la propagation du son dans un milieu homogène. En électromagnétisme, les équations de Maxwell sont hyperboliques et linéaires. En non linéaire, les équations hyperboliques sont l'expression de lois de conservation. Par exemple, les équations d'Euler expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale dans un fluide parfait compressible.

1.5.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

ou $u(x, y, z)$ désigne la fonction inconnue.

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\Delta u = f.$$

Equation de poisson

$$\Delta u = f.$$

Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f.$$

Equation de burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

Chapitre 2

Méthode spectrale

2.1 Polynôme Orthogonaux

2.1.1 Fonction poids

Définition 4 *Soit I un intervelle de $\mathbb{R}$, On appele une fonction poids w sur I toute fonction $w : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telque pour tont $n \in \mathbb{N}$:*

$$\int_I |x^n| \, w(x)dx < +\infty. \tag{1.1.1}$$

On considère l'espace vecteriel E des foction continue sue I telle que:

$$\|F\|_w = \sqrt{\int_I |f(x)|^2 \, w(x) \, dx} < +\infty, \tag{1.1.2}$$

E est muni d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle_w$ définit par

$$\langle f, g \rangle_w = \int_I f(x) \, g(x) \, w(x) \, dx, \tag{1.1.3}$$

et $\|.\|_w$ est la norme associée a ce produit scalaire.

2.1.2 Qalque exemples de polynôme orthogonaux

Polynôme de Chebychev

Les polynômes de Chebychev, nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Lvovich Chebychev

Polynômes de Chebychev de la première espèce T_n Soit n un entier naturel. Il existe un et un seul polynôme noté T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = cos(n\theta). \tag{1.3.1}$$

Unicité T_n est déterminé sur $[-1,1]$ qui est infini et donc uniquement déterminé .

Existence Soient n un entier naturel et θ un réel .

$$\begin{aligned} cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}), \\ &= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n), \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left((\cos\theta)^{n-k} + (i\sin\theta)^k\right)\right), \\ &= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (i\sin\theta)^{2p}, \\ &= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} \left(1-\cos^2\theta\right)^p. \end{aligned}$$

Et le polynôme $\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p} (x)^{n-2p} (1-x^2)^p$ convient

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p} (x)^{n-2p} \left(1-x^2\right)^p. \tag{1.3.2}$$

Propriétés simples

- $T_n = 1$.
- $T_n(-1) = (-1)^n$.
- T_n est une fonction paire si n est pair, impaire si n est impair.
- $.T_n'(1) = n^2$.
- $T_n'(-1) = (-1)^{n-1} n^2$.

En effet

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= \frac{d\theta}{dx}\frac{d}{d\theta}\cos n\theta, \\ &= n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Orthogonalité Les polynômes T_n, orthogonaux sur l'intervalle de de support $[-1,1]$ avec la fonction poids $w(x)$ définie par

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1 < x < 1, \\ 0 & x \geq 1. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Et sont normalisés par l'exigence que $T_n(1) = 1$.

Relation rucurence de T_n

- pour $n \geq 0$,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \tag{1.3.4}$$

avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

- Définissons quelques suites qui permettront de condenser les relations de récurrence en des formulations valables pour $n \in \mathbb{N}$

.$(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ $c_n = 0$ si $n < 0$, $c_0 = 2$, $c_n = 1$ si $n > 0$.

.$(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ $d_n = 0$ si $n < 0, d_n = 1$ si $n \geq 0$.

a:

$$c_n T_{n+1}(x) + d_{n-1}T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), n \in \mathbb{N}. \tag{1.3.4}$$

Cette relation résume les égalités suivantes :

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), n \geq 0, \\ 2T_1(x) \qquad = 2xT_0(x). \end{cases} \tag{1.3.5}$$

-

$$c_n \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} + d_{n-2}\frac{T'_{n-2}(x)}{n-1} = 2T_n(x), n \in \mathbb{N}. \tag{1.3.6}$$

Cette relation résume les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = 2xT_n(x), n \geq 2, \\ \frac{T'_2(x)}{2} \quad = 2T_1(x), \\ 2T'_1(x) \quad = 2T_0(X). \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Pour $k \geq 1$ le changement de variable $x = \cos\theta$ permet de calculer:

$$\begin{aligned} T'_k(x) &= \frac{d\theta}{dx}\frac{d}{d\theta}\cos k\theta, \\ &= k\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

D'où pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} &= \frac{\sin[(n+1)\theta] - \sin[(n-1)\theta]}{\sin\theta}, \\ &= 2\cos n\theta, \\ &= 2T_n(x). \end{aligned}$$

Degré, coefficient dominant 1.Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On rappelle que

$$T_{n=} \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p} (x)^{n-2p} \left(1-x^2\right)^p.$$

Puisque pour tout entier naturel $p \in \left[0, E\left(\frac{n}{2}\right)\right]$,on'a $n - 2p + 2p = n, T_n$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.De plus ,le coefficient de x^n dans vaut

$$\begin{aligned} c_n^0 + c_n^2 + c_n^4 + ... &= \frac{1}{2}\left(\left(c_n^0 + c_n^1 + c_n^2 + c_n^3 + ...\right) + \left(c_n^0 - c_n^1 + c_n^2 - c_n^3 .....\right)\right), \\ &= \frac{1}{2}\left((1+1)^n + (1-1)^n\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(2^n + 0\right)\left((1-1)^n = 0 \text{ car } n \geq 0\right), \\ &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Les points de collocation de Gauss et Gauss-Lobatto les pointes de collocation Gauss-Chebyshev sont

$$x_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2N+2}, w_j = \frac{\pi}{N+1}, 0 \leq j \leq N. \tag{1.3.9}$$

les points de collocation Gauss-Lobatto-Chebyshev sont

$$x_0 = 0, x_N = 1, w_0 = w_N = \frac{\pi}{2N}; x_j = \cos\frac{\pi j}{N}, w_j = \frac{\pi}{N}, 1 \leq j \leq N-1. \tag{1.3.10}$$

Polynômes de Legendre

Équation différentielle de Legendre .Les polynômes de Legendre satisfait l'équation différentielle

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(1+n)y = 0, \tag{1.4.1}$$

définit sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec $n = 1.2.3.....$

Formule de Rodrigues pour les L_n Les polynômes de Legendre $L_n(x)$ de degré n sont donnés par la formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(x^2 - 1 \right)^n \right]. \tag{1.4.2}$$

Fonction poids de Legendre La fonction poids pour les polynômes de Legendre est $w(x) = 1$, et

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{pour } n = m \end{cases} \quad n, m = 1, 2, 3..... .$$

Les relation rucurence de L_n

- $(n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1) x L_n(x) - n L_{n-1}(x)$.
- On a

$$\begin{aligned} \left(x^2 + 1 \right) \frac{d}{dx} \left[L_n(x) \right] &= n x L_n(x) - L_{n-1}(x), \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x) \right]. \end{aligned}$$

- $\frac{d}{dx} \left[L_{n+1}(x) \right] - x \frac{d}{dx} \left[L_n(x) \right] = (n+1) L_n(x)$.
- $x \frac{d}{dx} \left[L_n(x) \right] - \frac{d}{dx} \left[L_{n-1}(x) \right] = n L_n(x)$.
- $\frac{d}{dx} \left[L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x) \right] = (2n+1) L_n(x)$.

Les points de collocation de Gauss et Gauss-Lobatto

Proposition 5 *Le polynôme $L_n(x)$ admet n racines distinetes dans $I =]-1, 1[$, $-1 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < 1$, c'est racies s'appellent points de collocation de Gauss. Le polynome $(1 - x^2) L'_n(x)$ admet $(n+1)$ racines dans $[-1, 1]$, $-1 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n = 1$, c'est racies s'appellent points de collocation de Gauss-Lobatto.*

Corollaire 2 *Pour tout entier $n \geq 0$ on note k_n le coefficient de x_n dans $L_n(x)$ tel que*

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Corollaire 3 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a la formule*

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x) dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

Polynômes de Laguerre

Formule de Rodrigues pour les l_n Les polynômes de Laguerre l_n de degré n sont donnés par la formule de Rodrigues

$$l_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x}x^n\right]. \tag{1.5.1}$$

Équation différentielle satisfaite par les l_n Les polynômes de Laguerre satisfaisaient l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0, \tag{1.5.2}$$

définit sur l'intervalle $[0, \infty[$, avec $n = 0, 1, 2, ...$

Fonction poids de l_n La fonction poids pour les polynômes de Laguerre est $w(x) = e^{-x}$, et

$$\int_0^\infty e^{-x} l_m(x)\, l_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m = n \\ 1 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad n, m = 1, 2, 3, ... \tag{1.5.3}$$

Relation récurence de l_n

- $(n+1)\, l_{n+1}(x) = (2n+1-x)\, l_n(x) - n l_{n-}(x)$.
- $x\frac{d}{dx}\left[l_{n+1}(x)\right] = n l_n(x) - n l_{n-1}(x)$.
- $l_n = l_n' - l_{n+1}$

Polynômes de Hermite.

Équation différentielle satisfaite par les H_n Les polynômes de Hermite H_n satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2nx = 0. \tag{1.6.1}$$

Définit sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$, tel que $n = 0, 1, 2, ...$

Formule de Rodrigues pour les H_n Les polynômes de Hermite $H_n(x)$ de degré n sont donnés par la formule de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]. \tag{1.6.2}$$

Fonction poids de H_n La fonction poids pour les polynômes de Hermite de degree n est $w(x) = e^{-x^2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n, \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & \text{pour } m = n. \end{cases}$$

Relation récurence de H_n

- $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.
- $\frac{d}{dx}[H_n(x)] = 2nH_{n-1}(x)$.
- $H_n(x) = -\frac{d}{dx}[H_{n-1}(x)] + x\frac{d}{dx}[H_n(x)]$.

2.1.3 L'expression explicite et implicite de u' et u''

1.En utiliser les Polynômes de Legendre

$(L_n)_{n\geq 1}$ la famille de polynôme de Legendre

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)},$$

on'a la relaction récurence suivente

$$\frac{d}{dx}[L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)] = (2n+1) L_n(x) \ , n \geq 1.$$

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1}\left(L'_{n+1}(x) - c_n L'_{n-1}(x)\right), \\ L_0(x) = L'_1(x) = 1, \end{cases} \quad n \geq 1, c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0, \\ 1 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

L'expression de U'

$$u(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n L_n(x),$$

et

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{n\geq 0} \alpha_n L'_n(x), \\ &= \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{(1)} L_n(x). \end{aligned}$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2n+1} L'_{n+1}(x) - \frac{c_n}{2n+1} L'_{n-1}(x) \ , \ n \geq 0, c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0, \\ 1 & \text{si } n > 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

en multipliant l'équation (1.12) $\alpha_n^{(1)}$ on a

$$\alpha_n^{(1)} L_n(x) = \frac{\alpha_n^{(1)}}{2n+1} L'_{n+1}(x) - \frac{c_n}{2n+1} \alpha_n^{(1)} L'_{n-1}(x),\ n \geq 0, c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

en somme pour $n \geq 0$

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_n^{(1)} L_n(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n^{(1)}}{2n+1} L'_{n+1}(x) - \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{2n+1} \alpha_n^{(1)} L'_{n-1}(x),\ n \geq 0, c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0, \\ 1 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_n L'_n(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n^{(1)}}{2n+1} L'_{n+1}(x) - \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n^{(1)}}{2n+1} L'_{n-1}(x),$$

en changé les indices de la somme on a

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_n L'_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_{n-1}^{(1)}}{2n-1} L'_n(x) - \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{2n+3} L'_n(x),$$

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n L'_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_{n-1}^{(1)}}{2n-1} L'_n(x) - \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{2n+3} L'_n(x),$$

par identification on a

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\alpha_{n-1}^{(1)}}{2n-1} - \frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{2n+3}, \forall n \geq 1, \\
\alpha_{n+1} &= \frac{\alpha_n^{(1)}}{2n+1} - \frac{\alpha_{n+2}^{(1)}}{2n+5}, \forall n \geq 0, \\
\alpha_{n+3} &= \frac{\alpha_{n+2}^{(1)}}{2n+5} - \frac{\alpha_{n+4}^{(1)}}{2n+9}, \forall n \geq 0, \\
\alpha_{n+5} &= \frac{\alpha_{n+4}^{(1)}}{2n+9} - \frac{\alpha_{n+6}^{(1)}}{2n+13}, \forall n \geq 0, \\
\alpha_{n+7} &= \frac{\alpha_{n+6}^{(1)}}{2n+13} - \frac{\alpha_{n+8}^{(1)}}{2n+17}, \forall n \geq 0, \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}$$

en somme α_p sur p pour $p = n+1$ on a

$$\sum_{\substack{p=n+1 \\ step\ 2}} \alpha_p = \frac{\alpha_n^{(1)}}{2n+1},$$

d'ou

$$\alpha_n^{(1)} = (2n+1) \sum_{\substack{p=n+1 \\ step\ 2}} \alpha_p. \tag{4.4.1}$$

L'expression de U''

$$\begin{aligned} u''(x) &= \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{(1)} L_n'(x), \\ &= \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{(2)} L_n(x). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(2)} &= (2n+1) \sum_{\substack{p=n+1 \\ step\ 2}} \alpha_p^{(1)}, \\ &= (2n+1) \sum_{\substack{p=n+1 \\ step\ 2}} (2p+1) \sum_{\substack{m=p+1 \\ step\ 2}} \alpha_m, \\ &= (2n+1) \sum_{\substack{p=n+1 \\ step\ 2}} \sum_{\substack{m=p+1 \\ step\ 2}} (2p+1)\, \alpha_m. \end{aligned}$$

d'après Fubini parmiti les sommes

$$\alpha_n^{(2)} = (2n+1) \sum_{\substack{m=n+2 \\ step\ 2}} \alpha_m \sum_{\substack{p=n+1 \\ step\ 2}}^{m-1} (2p+1)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p=n+1 \\ step\ 2}}^{m-1} (2p+1) &= \frac{1}{2}(m-n)\left(\frac{2n+3+2m-1}{2}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(m^2 - n^2 + m - n\right), \end{aligned}$$

d'ou

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{(2n+1)}{2} \sum_{\substack{m=n+2 \\ step\ 2}} \left(m^2 - n^2 + m - n\right) \alpha_m. \tag{4.4.2}$$

2.En utiliser les Polynômes de Chebychev

1.L'expression de U'

$$u(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n T_n(x),$$

et

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{n\geq 1} \alpha_n T'_n(x), \\ &= \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(1)} T_n(x). \end{aligned}$$

on a la relation récurrence suivante pour

- $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ $c_n = 0$ si $n < 0$, $c_0 = 2$, $c_n = 1$ si $n > 0$.
- $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ $d_n = 0$ si $n < 0, d_n = 1$ si $n \geq 0$.

$$c_n \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} + d_{n-2}\frac{T'_{n-2}(x)}{n-1} = 2T_n(x), n \in \mathbb{N}, \tag{5.5.1}$$

$$\alpha_n^{(1)} c_n \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} + \alpha_n^{(1)} d_{n-2}\frac{T'_{n-2}(x)}{n-1} = 2\alpha_n^{(1)} T_n(x), n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(1)} c_n \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} + \sum_{n\geq 2} \alpha_n^{(1)} d_{n-2}\frac{T'_{n-2}(x)}{n-1} = 2\sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(1)} T_n(x), n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(1)} c_n \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} + \sum_{n\geq 1} \alpha_{n+1}^{(1)} d_{n-1}\frac{T'_{n-1}(x)}{n} = 2\sum_{n\geq 1} \alpha_n T'_n(x), n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_{n-1}^{(1)} c_{n-1} \frac{T'_n(x)}{n} + \sum_{n\geq 1} \alpha_{n+1}^{(1)} d_{n-1}\frac{T'_{n-1}(x)}{n} = 2\sum_{n\geq 1} \alpha_n T'_n(x), n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_{n-1}^{(1)} c_{n-1} \frac{T'_n(x)}{n} + \sum_{n\geq 1} \alpha_{n+1}^{(1)} d_{n-1}\frac{T'_{n-1}(x)}{n} = 2\sum_{n\geq 1} \alpha_n T'_n(x), n \in \mathbb{N}.$$

Par identification

$$\frac{\alpha_{n-1}^{(1)}}{n} c_{n-1} + \frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{n} d_{n-1} = 2\alpha_n, n \geq 1,$$

pour $n = 1$ on a

$$2\alpha_0^{(1)} - \alpha_2^{(1)} = 2\alpha_1,$$

pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(1)} - \alpha_{n+2}^{(1)} &= 2\,(n+1)\,\alpha_{n+1}, \\
\alpha_{n+2}^{(1)} - \alpha_{n+4}^{(1)} &= 2\,(n+3)\,\alpha_{n+3}, \\
\alpha_{n+4}^{(1)} - \alpha_{n+6}^{(1)} &= 2\,(n+5)\,\alpha_{n+5}, \\
\alpha_{n+6}^{(1)} - \alpha_{n+7}^{(1)} &= 2\,(n+7)\,\alpha_{n+7}, \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\alpha_n^{(1)} = \begin{cases} \sum\limits_{p=n+1} 2p\alpha_p, \\ \alpha_0^{(1)} = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2^{(1)}, \end{cases}$$

d'ou

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}} p\alpha_p. \tag{5.5.2}$$

L'expression de U''

$$u\,(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n T_n\,(x)\,.$$

$$\begin{aligned}
u'\,(x) &= \sum_{n\geq 1} \alpha_n T_n'\,(x)\,, \\
&= \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(1)} T_n\,(x)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u''\,(x) &= \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(1)} T_n'\,(x)\,, \\
&= \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(2)} T_n\,(x)\,.
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(2)} &= \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}} p\alpha_p^{(1)}, \\
&= \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}} p \left(2 \sum_{\substack{m=p+1 \\ setep\ 2}} m\alpha_m \right), \\
&= \frac{4}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}} p \sum_{\substack{m=p+1 \\ setep\ 2}} m\alpha_m.
\end{aligned}$$

D'après Fubini en parmitie les sommes

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{4}{c_n} \sum_{\substack{m=n+2 \\ setep\ 2}} m\alpha_m \sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}}^{m-1} p,$$

et

$$\sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}}^{m-1} p = \frac{1}{4}\left(m^2 - n^2\right),$$

d'ou

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{m=n+2 \\ setep\ 2}} m\left(m^2 - n^2\right)\alpha_m. \tag{5.5.3}$$

3.En utiliser les Polynômes de Lagurre

- $$u = \sum_{n\geq 0} \alpha_n l_n.$$

$$\begin{aligned} u' &= \sum_{n\geq 0} \alpha_n l'_n, \\ &= \sum_{n} \alpha_n^{(1)} l_n. \end{aligned}$$

On a la relation suivant de l_n

$$l_n = l'_n - l_{n+1},$$

on a

$$\alpha_n^{(1)} l_n = \alpha_n^{(1)} l'_n - \alpha_n^{(1)} l_{n+1},$$

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{(1)} l_n &= \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(1)} l'_n - \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{(1)} l_{n+1}, \\ \sum_{n\geq 1} \alpha_n l'_n &= \sum_{n\geq 1} \alpha_n^{(1)} l'_n - \sum_{n\geq 1} \alpha_{n-1}^{(1)} l_n, \end{aligned}$$

,

par identification on a

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \alpha_n^{(1)} - \alpha_{n-1}^{(1)} \quad n \geq 1, \\
\alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^{(1)} - \alpha_n^{(1)} \quad n \geq 0, \\
\alpha_{n+2} &= \alpha_{n+1}^{(1)} - \alpha_{n+1}^{(1)} \quad n \geq 0, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\alpha_n^{(1)} &= -\sum_{p=n+1} \alpha_p.
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
u'' &= \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{(1)} l_n', \\
&= \sum_{n\geq 0} \alpha_n^{(2)} l_n.
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(2)} &= -\sum_{p=n+1} \alpha_p, \\
&= -\sum_{p=n+1} \left(-\sum_{m=p+1} \alpha_m \right), \\
&= \sum_{p=n+1} \sum_{m=p+1} \alpha_m,
\end{aligned}$$

d'après Fubinie on a parmitie les sommes

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(2)} &= \sum_{m=n+2} \left(\sum_{p=n+1}^{m-1} 1 \right) \alpha_m, \\
&= \sum_{m=n+1} (m-n-1)\, \alpha_m.
\end{aligned}$$

2.2 Méthode Spectrale

Une formulation générale d'un problème d'EDP:

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(u)(x,t) + f(x,t) & x \in \Omega, t \geq 0. \\
Bu(x,t) = g(t) & x \in \partial\Omega, t > 0. \quad . \\
u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega.
\end{cases} \tag{1.7.1}$$

- Ω :un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$.

- On cherche $u(x,t)$ fonction du temps à valeur dans un espaces de **Hilbert V** muni d'une norme $\|.\|$.
- f un elément de **V**.
- F est fonction de **V** dans **V.**
- B:un opérateur de trace, déterminant les conditions aux limites, on l'omettra si le domaine est périodique.
- $u_0(x)$: une condition initiale.

Les méthodes spectrales consistent à décomposé les éléments de **V** sur une base de fonctions $(\varphi_k)_{k=0.1.2....}$.On cherche :

$$u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \tag{1.7.2}$$

élément de l'espace Bn engendré par les n premières fonctions de base, de telle sorte que cette fonction approxime la vraie solution du problème.

On défini le résidu associé à l'approximation u_n par

$$R_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} - F(u_n) - f \tag{1.7.3}$$

ce résidu serait nul si u_n était la vraie solution. On cherche donc à le rendre "petit". Pour cela on impose que R_n soit nul en projection sur un sous-espace de **V** de dimension n. Cette projection P_n dépend de la méthode spectrale employée .On a donc remplacé le problème initial par le problème approché

$$\text{trouvé} \quad u_n \in B_n \quad \text{telle que} \quad P_n R_n = 0$$

On est alors ramené notre problème à la résolution de n équations différentielles en temps dont les inconnues sont les α_k.

2.2.1 Méthode de Galerkin

En mathématiques, dans le domaine de l'analyse numérique, les méthodes de Galerkin forment une classe de méthodes permettant de transformer un problème continu (par exemple une équation différentielle) en un problème discret.

Principe de la méthode

La méthode de Galerkin est applicable pour les équations avec des conditions aux limites périodiques ou homogènes. Soit $B = \{v \in \mathbf{H}, Bv = 0\}$ le sous-espace des fonctions de $\mathbf{H}$ vérifiant les conditions aux limites. Dans cette méthode les $(\varphi_n)_{n=0.1.2....}$ forment une base de B. En cherchant

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \varphi_n \tag{1.7.4}$$

dans B engendré par les $(\varphi_n)_{n=0.1.2...N}$, on est sûr de trouver une fonction (une solution) vérifiant les conditions aux limites. Soit $P_N^{\perp}$ la projection orthogonale de $\mathbf{H}$ sur B_N. La méthode de Galerkin consiste à résoudre le problème approché suivant

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \varphi_n \in B_n \quad \text{telle que} \quad P_N^{\perp} R_N = 0, \tag{1.7.5}$$

avec

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - F(u_N) - f.$$

Exemple 1 *On applique la méthode de Galerkin sur le problème aux limite suivant*

$$\begin{cases} -u'' + u' - 2u = -2 \quad , -1 < x < 1, \\ u(-1) = u(1) = 0, \end{cases}$$

La solotion exact est

$$u(x) = 1 - \frac{\sinh(2)}{\sinh(3)} \exp(x) - \frac{\sinh(1)}{\sinh(3)} \exp(-2x),$$

dans l'éspace $V = L^2(]-1,1[)$, *et* $B = \{u \in H, u(-1) = u(1) = 0\}$,*sous-espace de V. En utilisant les polynôme de Tchebyvhev* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *avec le poid* $w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *La fonction*

$$\varphi_n = T_n - T_{n-2}.$$

Tel que la fonction $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ *est base da B est vérifiant les condition aux borsds. Donc* $\varphi_n = \sum_{k=0}^{N} \varphi_{kn} T_k$, *on pose* $\varphi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Alos On cherche la solition* $u_N(x) = \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \varphi_n$.

Calculons le résudé R_n

$$\begin{aligned} R_N &= -u_N'' + u_N' - 2u_N + 2, \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2I\right) u_N + 2. \end{aligned}$$

On pose $A = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2I$, *tel que*

$$u''_N = \sum_{n=2}^{N} \alpha_n^{(2)} \varphi_n,$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(2)} &= \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{m=n+2 \\ setep\ 2}} m\left(m^2 - n^2\right)\alpha_m, c_0 = 2, c_n = 1, \\ &= \frac{d^2}{dx^2}\alpha.\end{aligned}$$

Et

$$u'_N = \sum_{n=2}^{N} \alpha_n^{(1)} \varphi_n.$$

Et

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(1)} &= \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}} p\alpha_p, \\ &= \frac{d}{dx}\alpha.\end{aligned}$$

La projection du residu est nulle

$$\langle R_N, \varphi_i\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle Au_N + 2, \varphi_i\rangle = 0; i = \overline{2.N},$$

$$\langle Au_N + 2, \varphi_i\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle Au_N, \varphi_i\rangle = -\langle 2, \varphi_i\rangle = 0, i = \overline{2.N},$$

$$\langle Au_N, \varphi_i\rangle = \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \langle A\varphi_n, \varphi i\rangle, i = \overline{2.N},$$

$$\begin{aligned}\langle A\varphi_n, \varphi i\rangle &= \langle A\sum_{k=0}^{N} \varphi_{kn} T_k, , \sum_{m=0}^{N} \varphi_{mi} T_m, \rangle = \sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \varphi_{kn}\varphi_{mi}\langle AT_k, T_m\rangle = \sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \varphi_{kn}\varphi_{mi}\langle \sum_{l=0}^{N} A_{lk} T_l, T_m\rangle, \\ &= \sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \varphi_{kn}\varphi_{mi} A_{lk}\langle T_l, T_m\rangle = \sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \varphi_{kn}\varphi_{mi} A_{mk} \left\|T_m\right\|^2_{L^2(-1,1)}, \\ &= \sum_{m=0}^{N} \left\|T_m\right\|^2_{L^2(-1,1)} \varphi_{mi} \left(A\varphi\right)_{mn},\end{aligned}$$

on pose $Q_{im} = \left(\left\|T_m\right\|^2_{L^2(-1,1)} \varphi_{mi}\right)^t$, *alors,* $\langle A\varphi_n, \varphi i\rangle = \left(QA\varphi\right)_{ni}$.

$$\langle Au_N, \varphi_i\rangle = \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \left(QA\varphi\right)_{ni}, i = \overline{2.N},$$

et $f = \sum_{0}^{N} f_n T_n$,

$$\langle f, \varphi_i \rangle = \langle \sum_{s=0}^{N} f_s T_s, \varphi i \rangle = \sum_{s=0}^{N} \langle f_s T_s, \varphi_i \rangle = \sum_{s=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} \varphi_{ki} f_s \langle T_s, T_k \rangle, i = \overline{2.N},$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \varphi_{si} f_s \left\| T_s \right\|^2_{L^2(-1,1)} = \sum_{n=0}^{N} Q_{is} f_s = QF, i = \overline{2.N},$$

Donc

$$R_N, \varphi_i \rangle = 0 \Leftrightarrow (QA\varphi)_{ni} . \alpha_n = QF.$$

Tel que $\alpha_n = (\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_N)^t , F = (f_1, f_2, ..., f_N)^t$ *.et* $\left\| T_s \right\|^2_{L^2(-1,1)} =$

Mise oeuvre de exemple (1): % Méthode de Galerkin chebyshev

% Resoudre l'equation u"+u'-2u=-2,u(-1)=0,u(1)=0

```
clc;
n=100;
h=2/n;
x=-1:h:1;
A=zeros(n,n);
B=zeros(n,n);
I=zeros(n,n);
E=zeros(n,n-2);
%chebyshevT
for j=3:2:n
A(1,j)=0.5*((j-1)^3);
end
for i=2:n
for j=(i+2):2:n
A(i,j)=(j-1)*(j^2-i^2-2*j+2*i);
end
end
```

```
for j=2:2:n
B(1,j)=(j-1);
end
for i=2:n
for j=(i+1):2:n
B(i,j)=2*(j-1);
end
end
for i=1:n
I(i,i)=1;
end
D=A+B-2*I;
for i=1:n-2
E(i,i)=-1;
E(i+2,i)=1;end
for j=1:n-2
for i=1:n
if i==1
F(i,j)=(pi)*E(i,j);
else
F(i,j)=(0.5*pi)*E(i,j);
end
end
end
b=zeros(n,1);
% b(1)=-2;
b(1)=-2;
```

```
% b(2)=2;
S=F.'*D*E;      %  QDphi
c=F.'*b;
u=S\c;
syms y
W=0;
for m=3:n
W=W+u(m-2)*(chebyshevT(m-1,x)-chebyshevT(m-3,x));
end
format long
figure (1)
plot(x,W,'r–','linewidth',3);
hold on
V=1-(sinh(2)/sinh(3))*exp(x)-(sinh(1)/sinh(3))*exp(-2*x);
%figure (2)
plot(x,V,'-','linewidth',2);
legend('Solution num','Solution exacte') ;
```

Les figures de solution numérique et solution exacte de exemple (1)

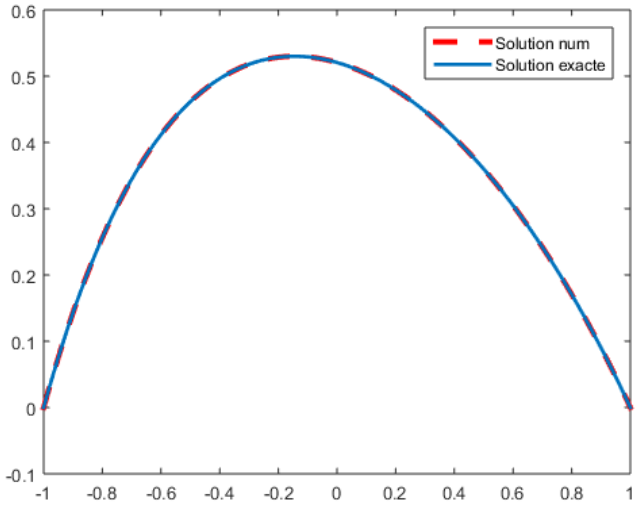


Figure 2.1: Solution numérique Galarkin et solution exact de Laplace

2.2.2 Méthode Tau

Principe de la méthode

La méthode Tau de Lanczos est applicable pour les équations avec des conditions aux limites non périodiques. Si F (l'opérateur de différentiation) contient des dérivations d'ordre k les conditions aux limites sont au nombre de k : $Bu = g$ (g ayant k composantes). Soit $(\varphi_n)_{n=0.....\infty}$ une base orthogonale ne vérifiant pas les conditions aux limites. La méthode consiste à chercher

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \varphi_n,$$

dans B_N

$$\begin{cases} P^{\perp}_{N-k} R_n = 0 \quad N-k \quad \text{équations}, \\ Bu_N = 0 \quad \text{k équations} . \end{cases}$$

1:$P^{\perp}_{N-k} R_N$ désigne la projection orthogonal de H sur B_{N-k}.

2:u_N est alors déterminé par N équations différentielles.

Exemple 2 *On considère l'équation de la chaleur avec les condition de Neumann*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - u = x & x \in [-1,1], t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

dans l'éspace $V = L^2(]-1,1[)$. *En utilisant les familles des polynomes de Legendre* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *tel que la famille des polynomes* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont orthogonaux pour le produit scalaire suivant*

$\langle f,g\rangle_w = \int_{-1}^{1} fgw$ *avev le poid* $w=1$. *Et en cherche la solotion* $u_N(x)$ *aproche de* $u(x)$ *tel que*

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t) L_n(x).$$

Calculons le residu R_N

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u_N}{\partial x} - u_N - x.$$

Et on calculons la projection orthogonal de H *sur* B_N *(engendré par* $N+1$ *fonctions de base)*

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle R_N, L_i\rangle = 0 \quad ;i=\overline{0.N-2},\ N-2 \text{ équation,} \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\partial u_N}{\partial x}(-1,t)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0 \end{array}\right\} \ ,2 \text{ équation,} \end{array} \right. \tag{1.8.2}$$

avec condition initiale $u(x,0)=u_0(x)$. *En pose*

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(2)}(t) L_n(x).$$

Et

$$\frac{\partial u_N}{\partial x} = \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(1)}(t) L_n(x).$$

Et

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} = \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n'(t) L_n(x).$$

Donc

$$\langle R_N, L_i\rangle = 0 \ ; i=\overline{0.N-2}.$$

$\Leftrightarrow$

$$\langle \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n'(t) L_n(x) - \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(2)}(t) L_n(x) + 2\sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(1)}(t) L_n(x) - \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n(t) L_n(x) - x, L_i\rangle = 0 \ ; i=\overline{0.N-2}.$$

et on'a

$$\langle \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n'(t) L_n(x) - \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(2)}(t) L_n(x) + 2\sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(1)}(t) L_n(x) - \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n(t) L_n(x), L_i\rangle = \langle x, L_i\rangle; i=\overline{0.N-2}.$$

$$\begin{array}{l} \langle \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n'(t) L_n(x), L_i\rangle - \langle \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(2)}(t) L_n(x),, L_i\rangle + \langle 2\sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(1)}(t) L_n(x), L_i\rangle \\ \qquad -\langle \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n(t) L_n(x), L_i\rangle = \langle x, L_i\rangle \qquad ; i=\overline{0.N-2} \\ \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n'(t) \langle L_n(x), L_i\rangle - \sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(2)}(t) \langle L_n(x), L_i\rangle + 2\sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n^{(1)}(t) \langle L_n(x), L_i\rangle \\ \qquad -\sum_{n=0}^{N-2} \alpha_n(t) \langle L_n(x), L_i\rangle = \langle x, L_i\rangle \qquad ; i=\overline{0.N-2}. \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c}\alpha_i'(t)\|L_i\|^2_{L^2([-1,1])}-\alpha_i^{(2)}(t)\|L_i\|^2_{L^2([-1,1])}+2\alpha_n^{(1)}(t)\|L_i\|^2_{L^2([-1,1])}\\ -\alpha_i(t)\|L_i\|^2_{L^2([-1,1])}=\langle x,L_i\rangle \qquad ;i=\overline{0.N-2}\end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha_i'(t)-\alpha_i^{(2)}(t)+2\alpha_n^{(1)}(t)-\alpha_i(t)=-\frac{\langle x,L_i\rangle}{\|L_i\|^2_{L^2([-1,1])}};i=\overline{0.N-2}.$$

Et on a

$$\begin{aligned}\alpha_i^{(2)}(t)&=\frac{(2i+1)}{2}\sum_{\substack{m=i+2\\ step\ 2}}\left(m^2-i^2+m-i\right)\alpha_m,\\ &=D_2\alpha(t).\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(1)}&=(2n+1)\sum_{\substack{p=n+1\\ step\ 2}}\alpha_p,\\ &=D_1\alpha(t).\end{aligned}$$

Et

$$\langle x,L_i\rangle=\int_{-1}^{1}xL_i(x)\,dx,i=\overline{0.N-2},$$

donc

$$\alpha_i'(t)=\alpha_i^{(2)}(t)-2\alpha_n^{(1)}(t)+\alpha_i(t)-\frac{\langle x,L_i\rangle}{\|L_i\|^2_{L^2([-1,1])}};i=\overline{0.N-2}.$$

Donc le système finale est

$$\begin{cases}\alpha'(t)=\left(D_2-2D_2+I_{N_{-2}}\right)\alpha(t)-F,\\ \begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{N}\alpha_n^{(1)}(t)L_n(-1)=0,\\ \sum\limits_{n=0}^{N}\alpha_n^{(1)}(t)L_n(1)=0\ ,\end{cases}\end{cases}$$

tel que $\alpha'(t)=\left(\alpha_0'(t),\alpha_1'(t),.....,\alpha_{N-2}'(t)\right)^T$, $\alpha(t)=\left(\alpha_0(t),\alpha_1(t),.....,\alpha_{N-2}(t)\right)^T$, *et* $F=\left(\frac{\langle x,L_0\rangle}{\|L_0\|^2_{L^2([-1,1])}},\frac{\langle x,L_1\rangle}{\|L_1\|^2_{L^2([-1,1])}},....,\frac{\langle x,L_{N-2}\rangle}{\|L_{N-2}\|^2_{L^2([-1,1])}}\right)^T$. *Pour trouver les costante* α_n *résoudre le système difirentielle* (S_1). *Avec les condition initiales*

$$u_0(x)=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n^0(t)L_n(x).$$

Mise oeuvre de exemple (2)

% ut-u"+2*u'-u=x,u'(-1)=u'(1)=0

% spectrale Tau method, les fonctions de bases Legendre,init condition L2-L0

```
function Neumann_spectra_Legendre_chaleur()
clc; clear all;
n=100;
h=2/n;
dt=(h^2)*0.3;
x=-1:h:1;
A=zeros(n,n);
B=zeros(n,n);
I=zeros(n,n);
F=zeros(2,n);
b=zeros(n,1);
F1=zeros(2,n-2);
x0=ones(2,1);
b(2)=1;
% legendreP(n,X);
for i=1:n
for j=(i+2):2:n
A(i,j)=((2*i-1)/2)*(j^2-i^2-j+i);
end
end
for i=1:n
for j=(i+1):2:n
B(i,j)=(2*i-1);
end
end
for i=1:n
I(i,i)=1;
```

```
end
% D=-A;
D=-A+2*B-I;
a0=zeros(n,1);
adot0=zeros(n,1);
a0(1)=-1;
a0(3)=1;
%  syms y
% for i=1:n
%  a0(i)=((2*i-1)/2)*int( (1.5*(y.^2)-1.5).*legendreP(i-1,y),y,-1,1);
%  end
y = fsolve(@sustem_non_lineaire,x0);
adot0=v0 ;
tspan = (0:100)*dt;
[t,a]=ode15i(@example,tspan,a0,adot0);
figure
plot(t,a(:,10),'-','linewidth',2);
W=0;
for m=1:n
W=W+a(:,m)*(legendreP(m-1,x));
end
figure (2)
[T,X]=meshgrid(t,x);
surf(T,X,W);
grid on
format long
hold on
```

```
format long
figure (1)
plot(-1:h:1,W(1,1:n),'r-',-1:h:1,W(40,1:n),'b-',-1:h:1,W(90,1:n),'c-','linewidth',2);
save Tau_Neumann_metho_evo_Legendre
function [nour] = example(t,a,adot)
nour=zeros(n,1);
z=D*a-b;
z1=B*a;
for i=1:n
z2(i)=((-1)^(i-1))*z1(i);
end
for k=1:n-2
nour(k)=adot(k)+z(k);
end
nour(n-1)=sum(z2(1:n));
nour(n)=sum(z1(1:n));
end
function [G] = sustem_non_lineaire(y)
v0=zeros(n,1);
v00=-D*a0+b;
for i=1:n-2
v0(i)=v00(i);
end
v0(n-1)=y(1);v0(n)=y(2);
v1=B*v0;
for i=1:n
v2(i)=((-1)^(i-1))*v1(i);
```

end

s1=sum(v1(1:n));s2=sum(v2(1:n));

G=[s1;s2];

end

end

Les figure des solutions de L'éqution de l'exemple (2)

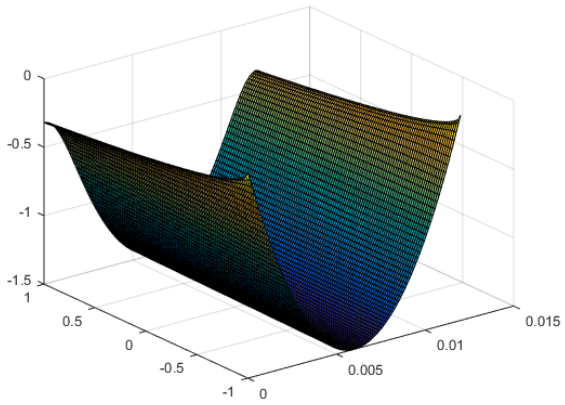


Figure 2.2: Solution numérique de chaleu Tau

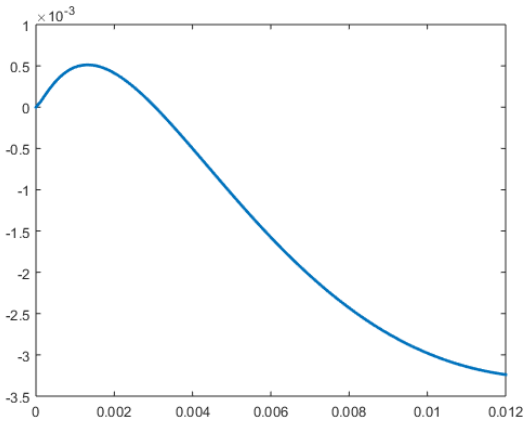


Figure 2.3: Solution numérique de chaleu Taur en point t=0.24

2.2.3 Méthode de collocation

Principe de la méthode

Comme la méthode de Galerkin, elle est applicable pour les problèmes où les conditions aux limites sont périodiques ou bien homogènes. Et comme pour la méthode de Galerkin les $(\varphi_k)_{k=1.....\infty}$ forment une base complète de **B,** et vérifiant donc les conditions aux limites. On se donne de plus $(x_i)_{i=1.....N}$ (N points) dits de collocation dans Ω tels que lamatrice $(\varphi_n(x_i))_{N\times N}$ soit inversible. La méthode consiste à chercher

$$u_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t)\,\varphi_n(x),$$

dans **B** (engendré par N fonctions de base) telle que son résidu

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} + F(u_N) - f,$$

vérifier les N conditions

$$R_N(x_i) = 0, i = \overline{0,N}.$$

Exemple 3 *On considère le problème suivant (équation de Burgers)*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0 \quad 0 < x < 1; t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

avec la solution exact est

$$u(x,t) = (x\exp(-t))/(2-\exp(-t)$$

dans l'éspace $V = L^2(]-1,1[)$. *En utilisant les familles des polynômes de Chebychev* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*tel que la famille des polynomes* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont orthogonaux pour le produit scalaire suivente* $\langle f,g\rangle_w = \int_{-1}^{1} fgw$ *avev le poid* $w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *Avec les points Gauss-Lobatoo-Chebychev* $x_j = -\cos\frac{\pi j}{N}$. *Et en cherche la solotion* $u_N(x)$ *aproche de* $u(x)$ *tel que*

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t)\, T_n(x).$$

Calculons le residu R_N*tel que* $u_N = \left(u^1, u^2, ..., u^N\right)^t$.*Calculons le residu* R_N

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} + u_N\frac{\partial u_N}{\partial x} - \frac{\partial u_N}{\partial x},$$

tel que

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t)\, T_n(x),$$

et

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n'(t)\, \varphi_n(x),$$

et

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{(2)}(t)\, \varphi_n(x),$$

et

$$\frac{\partial u_N}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{(1)}(t)\, \varphi_n(x),$$

et

$$u_N\frac{\partial u_N}{\partial x} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(t)\,\varphi_n(x) \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{(1)}(t)\,\varphi_n(x),$$

avec

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}} p\alpha_p,$$

$$= D_1\alpha.$$

Et

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{(2n+1)}{2} \sum_{\substack{m=n+2 \\ step\ 2}} \left(m^2 - n^2 + m - n\right) \alpha_m,$$

$$= D_2\alpha.$$

$$R_N(x_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{N} \alpha_n'(t)\, T_n(x_i) + \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t)\, T_n(x_i) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(1)}(t)\, T_n(x_i) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(2)}(t)\, T_n(x_i) = 0.$$

On pose $M_{in} = T_n(x_i)$*, on a*

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n'(t)\, M_{in} + \sum_{n=\grave{a}}^{N} \alpha_n(t)\, M_{in} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(1)}(t)\, M_{in} - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(2)}(t)\, M_{in} = 0,$$

$$M\alpha'(t) + (M\alpha(t))(MD_1\alpha(t)) - MD_2\alpha(t) = 0.$$

tel que la matrice M *est inversible . En multiplier par* M^{-1}*, en trouve le systeme défirentielle finalle*

$$\alpha'(t) = -M^{-1}(M\alpha(t))(MD_1\alpha(t)) + D_2\alpha(t).$$

Tel que $\alpha'(t) = (\alpha_0'(t), \alpha_1'(t), ..., \alpha_N'(t))^T$*,* $\alpha(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), ..., \alpha_N(t))^T$ *.*

Mise oeuvre de l'exemple (3)

%% ut+ux*u=-u

% spectrale Galerkin method, les fonctions de bases Chebyshev initial

% u0=x

function equation_burgers_Chebyshev_forme2()

n=10;

h=2/n;

dt=(h^2)*1.2;

x=-1:h:1;

a0=zeros(n,1);

a0(2)=1;

tspan = (0:100)*dt;

[t,a] = ode45(@example, tspan, a0);

% figure

% plot(t,a(:,10),'-','linewidth',2);

```
W=0;
for m=1:n
W=W+a(:,m)*chebyshevT(m-1,x);
end
R=W';
figure (1)
[T,X]=meshgrid(t,x);
surf(T,X,W');
%format long
figure (2)
[T,X]=meshgrid(t,x);
Fexact=(X.*exp(-T))./(2-exp(-T));
surf(T,X,Fexact);
%legend('Solution_exacte_equat_Burgers');
plot(0:h:1-h,W(90,1:n),'r-',0:h:1-h,W(20,1:n),'b-',0:h:1-h,W(40,1:n),'c-','linewidth',2);
R=W';
save('equation_burgers_Chebyshev_forme2','R','Fexact');
function adot = example(t,a)
adot=zeros(n,1);
Dxx=zeros(n,n);
Dx=zeros(n,n);
M=zeros(n,n);
%legendreP(n,X);
for j=3:2:n
Dxx(1,j)=0.5*((j-1)^3);
end
for i=2:n
```

```
for j=(i+2):2:n
Dxx(i,j)=(j-1)*(j^2-i^2-2*j+2*i);
end
end
for j=2:2:n
Dx(1,j)=(j-1);
end
for i=2:n
for j=(i+1):2:n
Dx(i,j)=2*(j-1);
endend
for i=1:n
for m=1:n
M(i,m)=chebyshevT(m-1,(-cos((i-1)*pi/n)));%point de collocation -1+2i/nend
end;
N=inv(M);
v1=M*a;
v2=M*Dx*a;
v=v1.*v2;
a1=N*v;
adot=-a1-a;
end
end
```

Les figures des solutions

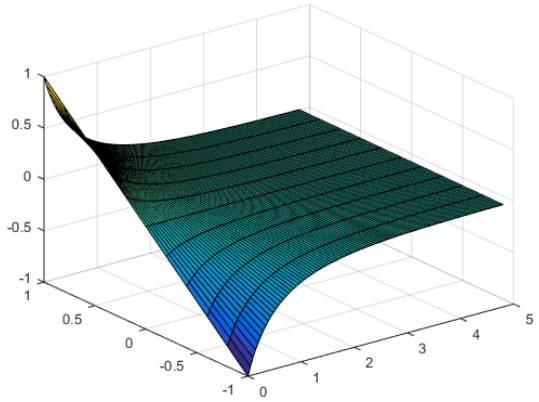


Figure 2.4: Solution exect de Burgers

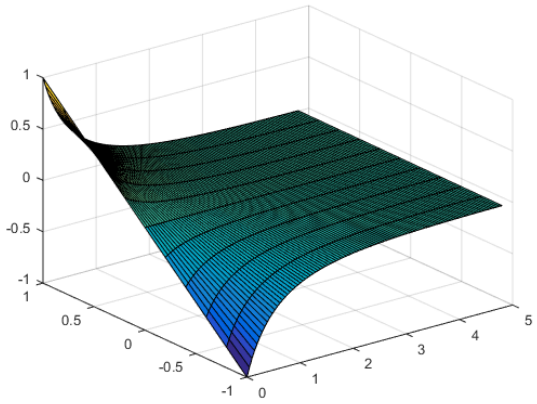


Figure 2.5: Solution numérique de léquation de Burguers Collocation

2.2.4 Méthode Tau-Collocation

Sont les mêmes que pour la méthode Tau. Conditions aux limites non périodiques.

Principe de la méthode

1.Comme pour la méthode Tau $(\varphi_n)_{n=1.....\infty}$ est une base orthogonale ne vérifiant pas les k conditions aux limites.

2.Comme pour la méthode de collocation $(x_i)_{i=1,\cdots,N}$ sont les N points du domaine Ω et l'on sait appliquer rapidement $M = (\varphi_n(x_i))$ et son inverseble. On calcule la projection $P_N^c R_N$ avec allers et retours entre l'espace spectral et l'espace physique. Soit $P_{N-k}^{\perp}$ la projection orthogonale sur B_{N-k}. Les N conditions déterminant $u_N \in B_N$ par cette méthode sont

$$\begin{cases} P_{N-k}^{\perp} P_N^c R_N = 0, \\ B u_n = 0, \end{cases}$$

Exemple 4 *On considère l'équation Burgers*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u_x u = 6t \qquad -1 < x < 1, t > 0, \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

dans l'éspace $V = L^2(]-1,1[)$. *En utilisant le polynôme de Chebishev* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *tel que la famille des polynômes* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont orthogonaux pour le produit scalaire suivente* $\langle f,g\rangle_w = \int_{-1}^{1} fgw$ *avev*

le poid $w = \frac{1.}{\sqrt{1-x^2}}$ *Et en cherche la solotion* $u_N(x)$ *aproche de* $u(x)$ *tel que*

$$u_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t) T_n(x).$$

Calculons le residu R_N

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} - 6t,$$

tel que

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n'(t) T_n(x).$$

Et

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(2)}(t) T_n(x).$$

Et

$$\frac{\partial u_N}{\partial x} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(1)}(t) T_n(x).$$

Et

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(1)}(t) &= \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ setep\ 2}} p\alpha_p(t), \\ &= D_1\alpha(t).\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(2)} &= \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{m=n+2 \\ setep\ 2}} m\left(m^2-n^2\right)\alpha_m(t), \\ &= D_2\alpha(t).\end{aligned}$$

Calculons le $P_N^c R_N$

$$\begin{aligned}R_N(x_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{N} \alpha_n'(t) T_n(x_i) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(2)}(t) T_n(x_i) + \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t) T_n(x_i) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(1)}(t) T_n(x), \\ = 6\sum_{n=0}^{N} fT_n(x_i).\end{aligned}$$

On pose $M_{in} = T_n(x_i)$, *on a*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \alpha_n'(t) M_{in} - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(2)}(t) M_{in} + \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t) M_{in} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(1)}(t) M_{in} = 6\sum_{n=0}^{N} fM_{in}, \\ M\alpha'(t) - MD_2\alpha(t) + M\alpha(t) MD_2\alpha(t) = MF,\end{aligned}$$

on a M *est inversible*

$$\alpha'(t) - D_2\alpha(t) + M^{-1}\left(M\alpha(t) MD_2\alpha(t)\right) = F.$$

Tel que $\alpha'(t) = (\alpha'_0(t), \alpha'_1(t), ..., \alpha'_N(t))^T$, $\alpha(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), ..., \alpha_N(t))^T$, $F = (f_0, f_1, ..., f_N)^T$.
En calculon

$$\begin{cases} \alpha'(t) - D_2\alpha(t) + M^{-1}(M\alpha(t)\, MD_2\alpha(t)) = F,\ N-2 \text{ équation,} \\ \begin{cases} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t)\, T_n(-1) = 0 \\ \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(t)\, T_n(1) = 0 \end{cases} \quad 2 \text{ équation.} \end{cases}$$

Mise oeuvre de l'exemple (4)

%ut-uxx+ux*u=6t

%u(-1)=0,u(1)=0

%spectrale tau-collocation method les fonctions de bases chebyshev poly

%u0=x, initial

function Tau_collocation_burgers_Chebyshev()

n=20;

h=2/n;

dt=(h^2)*1.2;

x=-1:h:1;

x0=ones(2,1);

a0=zeros(n,1);

a0(2)=1;

b=zeros(n,1);

adot0=zeros(n,1);

Dxx=zeros(n,n);

Dx=zeros(n,n);

b=zeros(n,1);

M=zeros(n,n);

%legendreP(n,X);

for i=1:n

for j=(i+2):2:n

```
if i==1
Dxx(i,j)=0.5*(j-1)*(j^2-i^2-2*j+2*i);
else
Dxx(i,j)=(j-1)*(j^2-i^2-2*j+2*i);
end
end
end
for i=1:n
for j=(i+1):2:n
if i==1
Dx(i,j)=(j-1);
else
Dx(i,j)=2*(j-1);
end
end
end
for i=1:n
for m=1:n
M(i,m)=chebyshevT(m-1,(-cos((i-1)*pi/n)));
end
end;
N=inv(M);
y = fsolve(@system_non_lineaire,x0);
adot0=v0;
tspan = (0:100)*dt;
[t,a]=ode15i(@example,tspan,a0,adot0);
figure
```

```
plot(t,a(:,10),'-','linewidth',2);
W=0;
for m=1:n
W=W+a(:,m)*chebyshevT(m-1,x);
end
figure (1)
[T,X]=meshgrid(t,x);
surf(T,X,W');
R=W';
save('equation_evolutive_burgers_Chebyshev','R');
function [nour] = example(t,a,adot)
a1=zeros(n,1);
nour=zeros(n,1);
b(1)=6*t;
v1=M*a;
v2=M*Dx*a;
v=v1.*v2;
a2=N*v;
z=Dxx*a-a2+b;
for i=1:n
a1(i)=((-1)^(i-1))*a(i);
end
for k=1:n-2
nour(k)=adot(k)-z(k);
end
nour(n-1)=sum(a1(1:n));
nour(n)=sum(a(1:n));
```

```
end
function [G] = system_non_lineaire(y)
v0=zeros(n,1);
u1=M*a0;
u2=M*Dx*a0;
u=u1.*u2;
u3=N*u;
v00=Dxx*a0-u3+b;
for i=1:n-2
v0(i)=v00(i);
end
v0(n-1)=y(1);v0(n)=y(2);
for i=1:n
v1(i)=((-1)^(i-1))*v0(i);
end
s1=sum(v0(1:n));s2=sum(v1(1:n));
G=[s1;s2];
end
end
```

Le figure de solution numérique de l'exemple (4)

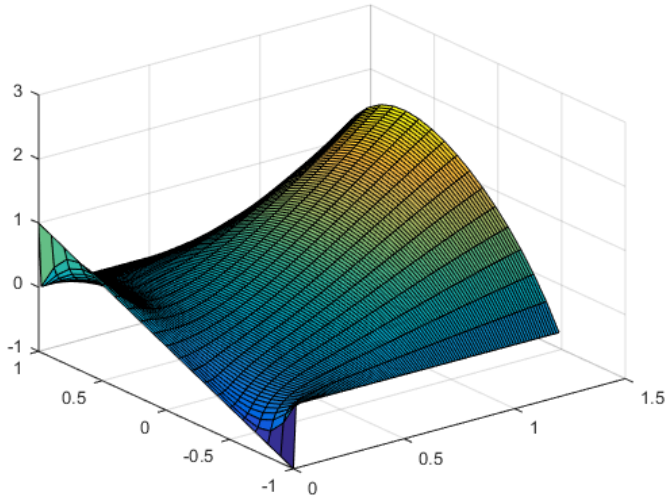


Figure 2.6: Solution numérique de Burgers avec Tau Colocation

2.2.5 Domaine d'application des méthodes spectrales

Méthode	Domaines d'appliquation
Galerkin-colication	Condition aux limitses périodique ou homogène
Tau et Tau colication	Condition aux limites non périodique

2.2.6 Fonction de bases usuelles

Condition aux limites	Méthode	Domaine et fonction de base
C.L periodique	Galerkin et collocation	$x \in [0, 2\pi]$, $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$, $(\sin(nx))_{n\geq 0}$, $(\cos(nx))_{n\geq 0}$
C.L non periodiques	Tau et Tau-collocation	$x \in [-1, 1]$, polynome de Tchibychev, Legendre,..

2.3 D'approximation polynomiale en dimension une

On étudie tout d'abord la distance à l'espace $P_N(\Gamma)$, pour le norme de l'espace $L^2(\Gamma)$. Avec $\Gamma =]-1, 1[$.

2.3.1 Le projection π_N

On note π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Gamma)$ sur $P_N(\Gamma)$. Pour toute fonction φ de $L^2(\Gamma)$, $\pi_N\varphi \in P_N(\Gamma)$ et vérifié que

$$\forall \psi_N \in P_N(\Gamma), \int_{-1}^{1} (\varphi - \pi_N\varphi)(\xi)\, \psi_N(\xi)\, d\xi = 0 \tag{6.1.1}$$

La famille $(L_n)_n$ des polynômes de Legendre est base hilbertienne de $L^2(\Gamma)$, et ces polynome sont orthogonaux deux à deux dans $L^2(\Gamma)$,pour tout fonction $\varphi \in L^2(\Gamma)$ admet le d´eveloppement

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n L_n \text{ avec } \varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) L_n(\xi) d\xi \tag{6.1.2}$$

et l'on a

$$\pi_N \varphi = \sum_{n=0}^{N} \varphi^n L_n.$$

Théorème 5 *pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante c positive ne d'ependent que de m telle que, pour toute fonction φ de $H^m(\Gamma)$, on ait*

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Gamma)} \leq c N^{-m} \|\varphi\|_{H^m(\Gamma)}, \tag{6.1.3}$$

on commence par prouver un r´esultat de continuit´e de l'opérateur auto-adjoint positif A dans $L^2(\Gamma)$

$$A\varphi = -\left(\left(1-\xi^2\right)\varphi'\right)'.$$

Lemme 3 *pour tout entier $l \geq 0$, l'opérateur A est continue de $H^{l+2}(\Gamma)$ dans $H^l(\Gamma)$ et pour tout entier $l \geq 0; m \geq 0$ l'opérateur A_m est continue de $H^{l+2m}(\Gamma)$dans $H^l(\Gamma)$*

Preuve. On vérifie par récurrence sur l'entier $k \geq 0$

$$\frac{d^k(A\varphi)}{d\xi^k} = -\left(1-\xi^2\right)\frac{d^{k+2}\varphi}{d\xi^{k+2}} + 2(1+k)\xi\frac{d^{k+1}\varphi}{d\xi^{k+1}} + k(k+1)\frac{d^k\varphi}{d\xi^k}, \tag{3.3}$$

lorsque $k = 0$

$$A\varphi = -\left(\left(1-\xi^2\right)\varphi'\right)' = -\left(1-\xi^2\right)\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + 2\xi\frac{d\varphi}{d\xi},$$

lorsque $k = 1$

$$\frac{d(A\varphi)}{d\xi} = -\left(1-\xi^2\right)\frac{d^3\varphi}{d\xi^3} + 4\xi\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + 2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2},$$

si $\frac{d^{k-1}(A\varphi)}{d\xi^{k-1}} = -(1-\xi^2)\frac{d^{k+1}\varphi}{d\xi^{k+1}} + 2k\xi\frac{d^k\varphi}{d\xi^k} + k(k-1)\frac{d^{k-1}\varphi}{d\xi^{k-1}}$, est vrais alors (3.3) est virifiant.

En appliquant l'identité $\forall k, 0 \leq k \leq l$

$$\left\|\frac{d^k(A\varphi)}{d\xi^k}\right\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\left(\left\|\frac{d^{k+2}\varphi}{d\xi^{k+2}}\right\|_{L^2(\Gamma)} + \left\|\frac{d^{k+1}\varphi}{d\xi^{k+1}}\right\|_{L^2(\Gamma)} + \left\|\frac{d^k\varphi}{d\xi^k}\right\|_{L^2(\Gamma)}\right),$$

alors $A : H^{l+2}(\Gamma) \longmapsto H^l(\Gamma)$ est continue. En étirant m fois on obtient

$$A^m : H^{l+2m}(\Gamma) \longmapsto H^l(\Gamma) estcontinue.$$

■

En voire la preuve de Théiorème (8):

Preuve. Etant donnée une fonction φ de $H^m(\Gamma)$ pour laquelle on écrit la décomposition (6.1.2),il faut estimer

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) L_n(\xi) d\xi.$$

On va distinguer deux cas, suivant quem est pair ou impair

1.Lorsque m est pair $m = 2k$ et (*),$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) L_n(\xi) d\xi$,d'aprés l'équation différentielle

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) AL_n(\xi) d\xi,$$

comme l'opérateur A est auto-adjoint dans $L^2(\Gamma)$, on obtient

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^{1} (A\varphi)(\xi) L_n(\xi) d\xi.$$

En itérant k fois ce résultat, on en déduit

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^{1} \left(A^k\varphi\right)(\xi) L_n(\xi) d\xi.$$

On constate donc que

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n(n+1))^{2k}} \left(\frac{\int_{-1}^{1} \left(A^k\varphi\right)(\xi) L_n(\xi) d\xi}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

On minore alors les $n(n+1)$ par N^2 ,ce qui donne

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq N^{-4n} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\int_{-1}^{1} \left(A^k\varphi\right)(\xi) L_n(\xi) d\xi}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)},$$

comme les $\frac{\int_{-1}^{1} \left(A^k\varphi\right)(\xi) L_n(\xi) d\xi}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}}$ sont les coefficients de $A^k\varphi$ dans la base des polynômes de Legendre, on a

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq N^{-4n} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{\int_{-1}^{1} \left(A^k\varphi\right)(\xi) L_n(\xi) d\xi}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \right)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)} = N^{-4n} \left\|A^k\varphi\right\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

En utilisant le Lemme(3) on obtient

$$A^k : H^{2k}(\Gamma) \longmapsto H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma),$$

alors

$$\begin{aligned}\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} &\leq N^{-4n} \left\|A^k\varphi\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq cN^{-4n} \|\varphi\|^2_{H^{2k}(\Gamma)},\\ &\Longrightarrow \|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq cN^{-2m} \left\|A^k\varphi\right\|^2_{H^m(\Gamma)},\end{aligned}$$

Lorsque m est impair : $m = 2k+1$ on obtient comme précédent:

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^{1} \left(A^k\varphi\right)(\xi) L_n(\xi)\, d\xi.$$

On utilise l'équation différentielle et On intégre par partie:

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}} \frac{1}{(n(n+1))^{2k+1}} \int_{-1}^{1} \left(A^k\varphi\right)'(\xi) L'_n(\xi) \left(1-\xi^2\right) d\xi.$$

On voit alors que

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n(n+1))^{2(k+1)}} \frac{\left(\int_{-1}^{1} \left(A^k\varphi\right)'(\xi) L'_n(\xi)(1-\xi^2)\, d\xi\right)^2}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}}$$

On note que, comme $(L'_n)_n; n \geq 1$,sont deux à deux orthogonaux pour la mesure $(1-\xi^2)\, d\xi$ pour toute fonction ψ de $H^1(\Gamma)$ admet le développement

$$\psi = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi^n L_n \text{ avec } \psi^n = \frac{\int_{-1}^{1} \psi'(\xi) L'_n(\xi)(1-\xi^2)\, d\xi}{\int_{-1}^{1} (L'_n(\xi))^2 (1-\xi^2)\, d\xi} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2_{H^1(\Gamma)} &= \int_{-1}^{1} (\psi'(\xi))^2 \left(1-\xi^2\right) d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} (\psi^n)^2 \|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)},\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\int_{-1}^{1} \psi'(\xi) L'_n(\xi)(1-\xi^2)\, d\xi\right)^2}{\left(\int_{-1}^{1} (L'_n(\xi))^2 (1-\xi^2)\, d\xi\right) 2} \int_{-1}^{1} (L'_n(\xi))^2 \left(1-\xi^2\right) d\xi,\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{\left(\int_{-1}^{1} \psi'(\xi) L'_n(\xi)(1-\xi^2)\, d\xi\right)}{\|L_n\|^2_{L^2(\Gamma)}}.\end{aligned}$$

En appliquant cette formule pour la fonction $\psi = A^k\varphi$ et en minorant $(n(n+1))^{2k+1}$ par $N^{2(2k+1)}$, on voit que

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq cN^{-2(k+1)} \int_{-1}^{1} \left(\left(A^k\varphi\right)'\right)^2 (\xi)\left(1-\xi^2\right) d\xi.$$

Et on conclut

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq cN^{-2m} \left\|\left(A^k\varphi\right)'\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq cN^{-2m} \left\|A^k\varphi\right\|^2_{H^1(\Gamma)},$$

d'ou ,d'aprés le lemme(3)

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq cN^{-2m} \|\varphi\|^2_{H^m(\Gamma)}.$$

■

Corollaire 4 *our tout entier $n \geq 0$, $k \geq 0$ existe une constante C positive ne dépendant de m et k tels que pour tout fonction $\varphi \in H^m(\Gamma)$ on ait*

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{H^{-k}(\Gamma)} \leq cN^{-k-m} \|\varphi\|^2_{H^m(\Gamma)}$$

Preuve. par définition de léspace $H^{-k}(\Gamma)$

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{H^{-k}(\Gamma)} = \sup_{\psi \notin H^k_0(\Gamma)} \frac{\int_{-1}^{1} (\varphi - \pi_N\varphi)(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi}{\|\psi\|_{H^k(\Gamma)}}.$$

En utilisant (6.1.1) on voit que

$$\int_{-1}^{1} (\varphi - \pi_N\varphi)(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = \int_{-1}^{1} (\varphi - \pi_N\varphi)(\xi)\,(\psi - \pi_N\psi)(\xi)\,d\xi \leq \|\varphi - \pi_N\varphi\|_{L^2(\Gamma)} \|\psi - \pi_N\psi\|_{L^2(\Gamma)},$$

il suffit alors d'applique la majoration (6.1.3) du théorème (8)

$$\int_{-1}^{1} (\varphi - \pi_N\varphi)(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \leq cN^{-m} \|\varphi\|_{H^m(\Gamma)} N^{-k} \|\psi\|_{H^k(\Gamma)},$$

$$\frac{\int_{-1}^{1} (\varphi - \pi_N\varphi)(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi}{\|\psi\|_{H^k(\Gamma)}} \leq cN^{-k-m} \|\varphi\|_{H^m(\Gamma)}.$$

$\Longrightarrow$

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^{-k}(\Gamma)} = CN^{-k-m} \|\varphi\|_{H^m(\Gamma)},$$

si l'on essaie d'écrire une majoration dérreur optimale de $\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{H^{-k}(\Gamma)}$ On s'apercoit qu'elle ne peut pas etre amélioré on démontre dans le cas particulier $\Longrightarrow$

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^1(\Gamma)} = CN^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1(\Gamma)},$$

on choisie $\varphi = L_{N+1} - L_{N-1}$

$$\varphi' = L'_{N+1} - L'_{N-1} = (2N+1) L_N,$$

$$\|\varphi\|^2_{H^1(\Gamma)} = \|\varphi'\|^2_{L^2(\Gamma)} = 2(2N+1),$$
$$\|\varphi\|_{H^1(\Gamma)} = \sqrt{2(2N+1)}.$$

$$\pi_N\varphi = -L_{N-1} \text{ et } \varphi - \pi_N\varphi = L_{N+1}.$$

$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|^2_{H^1(\Gamma)} = (N+1)(N+2),$$
$$\|\varphi - \pi_N\varphi\|_{H^1(\Gamma)} = \sqrt{(N+1)(N+2)},$$

il s'agit de construire un autre opérateur pour lequel une majoration d'erreur soient vérifier dans la norme $\|.\|_{H^1(\Gamma)}$. On s'intéresse dans un premier temps à l'approximation de fonction de $H^1_0(\Gamma)$ sur l'espace $P_N(\Gamma)$. ■

2.4 Methode spectrale de collocation pour le problème de Dirichlet

On s'intéresse à la discrétisation du problème de Dirichlet homogène sur le carré $\Gamma^2 =]-1,1[^2$

$$(Pb) = \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{sur } \Gamma^2, \\ u \in H^1_0(\Gamma), \end{cases} \tag{8.1}$$

On part de l'approximation de Galerkin avec le choix suivente pour la famille d'espace d'aproximation

$$(X_N)_{N\in\mathbb{N}} : X_N = P^0_N\left(\Gamma^2\right), ou\ P^0_N\left(\Gamma^2\right) = \left\{v \in P^0_N\left(\Gamma^2\right) \quad , v = 0 \text{ sur } \partial\left(\Gamma^2\right)\right\}.$$

Avec un tel choix, X_N est bien contenu dans $H^1_0(\Gamma)$.

Ensuite, on remplace l'intégration mathématique par une intégration numérique basée sur $(N+1)^2$ points de collocation de Gauss_Lobatoo. Le produit scalaire $\langle f, v\rangle$ est remplacé par le produit scalaire némurique

$$\langle f, v\rangle_N = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} f(\xi_i, \xi_j)\, w_i w_j, \tag{8.2}$$

et la forme bilinéaire $a(u,v)$ qui était définie comme $\langle \nabla u, \nabla v\rangle$ est remplacée par la forme bilinéaire

$$a_N(u,v) = \langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_N + \langle \partial_y u, \partial_y v\rangle_N. \tag{8.3}$$

On obtient ainssi un nouveau probleme discret

$$(Pb2) = \begin{cases} \forall v_N \in X_N,\ a_N(u_N, v_N) &= \langle f, u_N\rangle_N, \\ u_N \in X_N. \end{cases} \tag{8.4}$$

On va introduire le lemme suivante

Lemme 4 *Soit $N \geq 1$. Tout polynome $\varphi_N \in P_N(\Gamma)$ vérifie :*

$$\|\varphi_N\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \sum_{i=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_i)\, w_i \leq 3\,\|\varphi_N\|^2_{L^2(\Gamma)}. \tag{8.5}$$

Preuve. $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynome de Legendre, et

$$\|L_n\|^2 = \frac{2}{2N+1}, \tag{8.6}$$

on'a pour toute polynômes $\varphi_N \in P_N(\Gamma)$ on peut léécrire comme

$$\varphi_N = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i L_i, \tag{8.7}$$

$$\varphi_N^2 = \left(\sum_{i=0}^{N} \alpha_i L_i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j L_j\right),$$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \varphi_N^2 &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \alpha_i\alpha_j \int_\Gamma L_i L_j, \\ &= \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \|L_i\|^2. \end{aligned}$$

$$\left\|\varphi_N^2\right\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \left\|L_i\right\|^2 . \tag{8.7.1}$$

$$\begin{aligned}\varphi_N^2 &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i L_i + \alpha_N L_N\right)\left(\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j L_j + \alpha_N L_N\right), \\ &= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_i\alpha_j L_i L_j + \alpha_N L_N \left(\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i L_i + \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j L_j\right) + \alpha_N^2 L_N^2.\end{aligned}$$

$$\varphi_N^2(\xi_k) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_i\alpha_j L_i(\xi_k) L_j(\xi_k) + \alpha_N L_N(\xi_k)\left(\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i L_i(\xi_k) + \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j L_j(\xi_k)\right) + \alpha_N^2 L_N^2(\xi_k),$$

en sommet sur k

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_k) w_k &= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_i\alpha_j \sum_{k=0}^{N} L_i(\xi_k) L_j(\xi_k) w_k + \alpha_N \sum_{k=0}^{N} L_N(\xi_k) w_k, \\ &\left(\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \sum_{k=0}^{N} L_i(\xi_k) w_k + \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \sum_{k=0}^{N} L_j(\xi_k) w_k\right) + \alpha_N^2 \sum_{k=0}^{N} L_N^2(\xi_k) w_k, \\ &= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_i\alpha_j \sum_{k=0}^{N} L_i(\xi_k) L_j(\xi_k) w_k + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i\alpha_N \sum_{k=0}^{N} L_i(\xi_k) L_N(\xi_k) w_k, \\ &+ \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j\alpha_N \sum_{k=0}^{N} L_j(\xi_k) L_N(\xi_k) w_k + \alpha_N^2 \sum_{k=0}^{N} L_N^2(\xi_k) w_k, \\ &= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_i\alpha_j \int_{\Gamma i} L_i(x) L_j(x) + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i\alpha_N \int_{\Gamma} L_i(x) L_N(x), \\ &+ \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j\alpha_N \int_{\Gamma} L_j(x) L_N(x) + \alpha_N^2 \sum_{k=0}^{N} L_N^2(\xi_k) w_k,\end{aligned}$$

comme $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonaux sur le poids $w = 1$ alor $\int_{\Gamma} L_i(x) L_N(x) = 0, \forall i = \overline{1.N-1}$d'ou

$$\sum_{k=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_k) w_k = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \left\|L_i\right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \alpha_N^2 \sum_{k=0}^{N} L_N^2(\xi_k) w_k,$$

on'a le polynome $L_n^2 + N^{-2}(1-\xi^2)(L_n')^2$ est de degré $\leq 2N-1$.

$$\int_{\Gamma} \left(L_n^2 + N^{-2}\left(1-\xi^2\right)\left(L_n'\right)^2\right) d\xi = \sum_{k=0}^{N} \left(L_n^2(\xi_k) + N^{-2}\left(1-\xi_k^2\right)\left(L_n'(\xi_k)\right)^2\right) w_k,$$

$$\int_{\Gamma} L_n^2(\xi)\, d\xi + \int_{\Gamma} N^{-2}\left(1-\xi^2\right)\left(L_n'(\xi)\right)^2 = \sum_{k=0}^{N} L_n^2(\xi_k) w_k + \sum_{k=0}^{N} N^{-2}\left(1-\xi_k^2\right)\left(L_n'(\xi_k)\right)^2 w_k,$$

donc

$$\int_{\Gamma} L_n^2(\xi)\, d\xi + \int_{\Gamma} N^{-2}\left(1-\xi^2\right)\left(L_n'(\xi)\right)^2 = \sum_{k=0}^{N} L_n^2(\xi_k)\, w_k.$$

En intigré par parti l'intégrel suivante :

$$\int_{\Gamma} \left(1-\xi^2\right)\left(L_n'(\xi)\right)^2 = N(N+1)\int_{\Gamma} L_N^2(\xi)\, d\xi,$$

$$\left(2+\frac{1}{N}\right)\|L_N\|^2_{L^2(\Gamma)} = \sum_{k=0}^{N} L_n^2(\xi_k)\, w_k, \tag{8.7.2}$$

et on'a $2+\frac{1}{N} \leq 3$, donc

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_N^2 L_N^2(\xi_k)\, w_k = \alpha_N^2 \sum_{k=0}^{N} L_N^2(\xi_k)\, w_k,$$

d'apres (8.7.2)

$$\begin{aligned}
\|L_N\|^2_{L^2(\Gamma)} &\leq \sum_{k=0}^{N} L_n^2(\xi_k)\, w_k \leq 3\|L_N\|^2_{L^2(\Gamma)}, \\
\alpha_n \|L_N\|^2_{L^2(\Gamma)} &\leq \sum_{k=0}^{N} \alpha_n L_n^2(\xi_k)\, w_k \leq 3\alpha_n \|L_N\|^2_{L^2(\Gamma)}, \\
\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \|L_i\|^2_{L^2(\Gamma)} + \alpha_n \|L_N\|^2_{L^2(\Gamma)} &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \|L_i\|^2_{L^2(\Gamma)} + \sum_{k=0}^{N} \alpha_n L_n^2(\xi_k)\, w_k, \\
&\leq 3\left(\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \|L_i\|^2_{L^2(\Gamma)} + \alpha_n \|L_N\|^2_{L^2(\Gamma)}\right),
\end{aligned}$$

d'ou

$$\left\|\varphi_N^2\right\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \sum_{i=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_k)\, w_k \leq 3\left\|\varphi_N^2\right\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

■

2.5 L'estimation de l'érreur

Théorème 6 *Il existe $c>0$ tel que pour tout $f \in C^0(\Gamma^2)$ et tout $N \in \mathbb{N}$ on ait l'estimation d'erreur entre la solution u du problème (8,1) sur le carré Γ^2 , la solution u_N du problème (8,4) :*

$$\|u-u_N\|_{H^1(\Gamma^2)} \leq c\left(\begin{array}{c} \inf\limits_{v_N \in P^0_{N-1}(\Gamma^2)} \|u-v_N\|_{H^1(\Gamma^2)} + \|f-I_N f\|_{L^2(\Gamma^2)} \\ + \inf\limits_{f_N \in P_{N-1}(\Gamma^2)} \|f-f_N\|_{L^2(\Gamma^2)}. \end{array}\right) \tag{8.8}$$

Remarque 1

$$I_n f(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} f(\xi_i,\xi_j)\, l_i(\xi_i)\, l_j(\xi_j),$$

et $(l_i)_{i=\overline{0.N}}$ *le polynôme de l'agrange*

$$l_i(x) = \prod_{\substack{i=0\\ J\neq I}} \left(\frac{x-\xi_i}{\xi_i-\xi_j}\right).$$

La preuve de Théorème est basée sur le lemme de Cea.

Lemme 5 *(Lemme de Cea):On suppose que la forme* a_N *est coercive et soit* α_N *sa constante d'ellipticité, c'est-à-dire la plus grande constante* > 0 *telle que pour tout* $v_N \in X_N$ *on ait*

$$\alpha_N \|v_N\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a_N(u_N, v_N),$$

lors pour tout $f \in F$ *on a l'estimation d'erreur entre la solution* u *du problème (8.1) et la solution* u_N *de problème (8.4)*

$$\|u-u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(1+\frac{1}{\alpha_N}\right)\left(\begin{array}{c}\inf\limits_{v_N\in X_N}\|u-u_N\|_{H^1(\Omega)} + \sup\limits_{z_N\in X_N}\frac{|a(v_N,z_N)-a_N(v_N,z_N)|}{\|z_N\|_{H^1(\Omega)}}\\ + \sup\limits_{z_N\in X_N}\frac{|\langle f,Z_N\rangle - \langle f,z_N\rangle_N|}{\|z_N\|_{H^1(\Omega)}}\end{array}\right). \quad (8.9)$$

Preuve. Pour tout $v_N \in X_N$, on a

$$\|u-u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u-v_N\|_{H^1(\Omega)} + \|u_N-v_N\|_{H^1(\Omega)}; \quad (8.10)$$

Fixons $v_N \in X_N$ et posons $w_N = u_N - v_N$. L'ellipticité de la forme a_N nous donne :

$$\alpha_N \|u_N-v_N\|_{H^1(\Omega)} \times \|w_N\|_{H^1(\Omega)} \leq a_N(u_N-v_N, w_N). \quad (8.11)$$

Comme u_N est solution du problème (8.4), on a :

$$a_N(u_N-v_N, w_N) = \langle f, w_N\rangle_N - a_N(v_N, w_N). \quad (8.12)$$

Similairement, comme u est solution du problème (4.3), on a :

$$a(u-v_N, w_N) = \langle f, w_N\rangle - a(v_N, w_N). \quad (8.13)$$

Mettant bout à bout les deux dernières identités, on obtient

$$a_N(u_N-v_N, w_N) = a(u-v_N, w_N) + \langle f, w_N\rangle_N - \langle f, w_N\rangle + a(v_N, w_N) - a_N(v_N, w_N).$$

Combinant avec (8.11), on en déduit

$$\begin{aligned}\alpha_N \left\|u_N - v_N\right\|_{H^1(\Omega)} \times \left\|w_N\right\|_{H^1(\Omega)} \leq & \left\|u - v_N\right\|_{H^1(\Omega)} \times \left\|w_N\right\|_{H^1(\Omega)} \\ & + \sup_{z_N \in X_N} \frac{\left|a\left(v_N, z_N\right) - a_N\left(v_N, z_N\right)\right|}{\left\|z_N\right\|_{H^1(\Omega)}} \times \left\|w_N\right\|_{H^1(\Omega)} \\ & + \sup_{z_N \in X_N} \frac{\left|\langle f, Z_N\rangle - \langle f, z_N\rangle_N\right|}{\left\|z_N\right\|_{H^1(\Omega)}} \times \left\|w_N\right\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Divisant tout par $\left\|w_N\right\|_{H^1(\Omega)}$et réutilisant l'inégalité triangulaire (8.10), on obtient, pour tout $v_N \in X_N$

$$\left\|u - u_N\right\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha_N}\right) \left(\begin{array}{c} \inf_{v_N \in X_N} \left\|u - u_N\right\|_{H^1(\Omega)} + \sup_{z_N \in X_N} \frac{|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)|}{\|z_N\|_{H^1(\Omega)}} \\ + \sup_{z_N \in X_N} \frac{|\langle f, Z_N\rangle - \langle f, z_N\rangle_N|}{\|z_N\|_{H^1(\Omega)}} \end{array} \right). \quad (8.14)$$

■

En va la preuve de théorème (8)

Preuve. théorème (8):Pour tout $v_n \in P_{N-1}^0\left(\Gamma^2\right)$ et tout $z_N \in P_N^0\left(\Gamma^2\right)$, le polynome $\nabla v_N \nabla z_N$ est dans $P_{2N-1}\left(\Gamma^2\right)$, donc

$$a\left(v_N, z_N\right) = a_N\left(v_N, z_N\right),$$

donc

$$a\left(v_N, z_N\right) - a_N\left(v_N, z_N\right) = 0.$$

Il nous reste à majorer $\left|\langle f, z_N\rangle_N - \langle f, z_N\rangle\right|$, pour tout $z_N \in P_N^0\left(\Gamma^2\right)$ et pour tout $f_{N-1} \in P_{N-1}^0\left(\Gamma^2\right)$ on'a

$$\left|\langle f, z_N\rangle_N - \langle f, z_N\rangle\right| \leq \left|\langle f, z_N\rangle_N - \langle f_{N-1}, z_N\rangle_N\right| + \left|\langle f_{N-1}, z_N\rangle - \langle f, z_N\rangle\right|,$$

comme $\langle f, z_N\rangle_N = \langle I_N f, z_N\rangle_N$, on'a

$$\begin{aligned}\left|\langle f, z_N\rangle_N - \langle f, z_N\rangle\right| &\leq \left|\langle I_N f, z_N\rangle_N - \langle f_{N-1}, z_N\rangle_N\right| + \left|\langle f_{N-1}, z_N\rangle - \langle f, z_N\rangle\right|, \\ \left|\langle f, z_N\rangle_N - \langle f, z_N\rangle\right| &\leq \left|\langle I_N f - f_{N-1}, z_N\rangle_N\right| + \left|\langle f_{N-1} - f, z_N\rangle\right|, \\ &\leq 9\left(\left\|I_N f - f_{N-1}\right\|_{L^2(\Gamma^2)} + \left\|f_{N-1} - f\right\|_{L^2(\Gamma^2)}\right)\left\|z_N\right\|_{L^2(\Gamma^2)},\end{aligned}$$

d'ou

$$\frac{\left|\langle f, z_N\rangle_N - \langle f, z_N\rangle\right|}{\left\|z_N\right\|_{L^2(\Gamma^2)}} \leq 9\left(\left\|I_N f - f_{N-1}\right\|_{L^2(\Gamma^2)} + \left\|f_{N-1} - f\right\|_{L^2(\Gamma^2)}\right).$$

■

Bibliographie

[1] Chirtine Bernardi, Yvon Maday, Franscesca Rapetti, Discrétisation variatinnelles de problèmes aux limites elliptiques, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 75252 Paris Cedex 05, France.

[2] M. AZAIEZ, M. DAUGE et Y. MADAY, Méthodes Spectrales et des éléments Spectraux, Université Paul Sabatier F-31062 Toulouse Cedex, France (1993).

[3] Duane Johnso, Chebyshev polynômials in the Spectral Tau Method and Applications to Eigenvalue Problems, University of Florid, NASA Contractor Report 198451, May 1996.

[4] O.THUAL, Introduction aux méthodes spectrales, Département Hydraulyque et Mécanique des Fluides, 1996.

[5] Grégoire Allaire. Analyse numérique et optimisation : une introduction àla modélisation et à la similastion numérique, Frence, 2005 . 10, 11, 12

[6] Jie Shen ,Tao Tang, Spectral and High-Order Methods with Applications, Beijing 100717, China, Copyright© 2006 by Science Press.